2014年 経済学部 第6問

$\boxed{6}$ 次の命題を証明せよ．ただし，(2) の証明には (1) を使ってよい．

(1) xは実数とする．$x \geqq 4$のとき，$3x^2+3x+1<x^3$が成り立つ．

(2) nは自然数とする．$n \geqq 10$のとき，$n^3<2^n$が成り立つ．

(1) $f(x) = x^3-3x^2-3x-1$ とおくと．

$f'(x) = 3x^2-6x-3$

$= 3(x^2-2x-1)$

$\therefore f'(x)=0$ となるのは．$x = 1\pm\sqrt{2}$

$\therefore x \geqq 4$ においては．$f'(x)>0$ $\therefore f(x)$：単調増加．

$\therefore f(x) \geqq f(4) = 3$ $\therefore f(x)>0$ となり．$3x^2+3x+1<x^3$ ▨

(2) 数学的帰納法で示す．

(i) $n=10$のとき．(左辺)$=10^3$ (右辺)$=2^{10}=1024$ より．成り立つ

(ii) $n=k$のとき，成り立つと仮定すると．

$k^3<2^k$ が成り立つ また(1)より $3k^2+3k+1<k^3$

これらの両辺をそれぞれたして，

$k^3+3k^2+3k+1<2^k+k^3$

$\therefore (k+1)^3<2^k+k^3$

再び $k^3<2^k$ より，$(k+1)^3<2^{k+1}$

$\therefore n=k+1$のときも成り立つ

(i)，(ii)より．$n \geqq 10$となるすべての自然数 n について

$n^3<2^n$ が成り立つ ▨