2016年 理工学部 第2問

$\boxed{2}$ $f(x)$は2次関数であり，$f(0)=f(1)=0$を満たすとする．

(1) $a=\dfrac{1}{2}f''(0)$とする．このとき，$f(x)$はaを用いて$f(x)=\boxed{\text{キ}}$と表される．

(2) 定積分

$$\int_0^1 \{(f'(x)-x)^2-f(x)\}\,dx$$

の値が最も小さくなるのは$f(x)=\boxed{\text{ク}}$のときである．また，そのときの定積分の値は$\boxed{\text{ケ}}$である．

以下では，$f(x)=\boxed{\text{ク}}$，$m=\boxed{\text{ケ}}$とする．

(3) 関数$h(x)$は$h(0)=h(1)=0$を満たし，その導関数$h'(x)$は連続であるとする．さらに，IとJを

$$I=\int_0^1 \{(f'(x)+h'(x)-x)^2-(f(x)+h(x))\}\,dx$$

$$J=\int_0^1 \{(f'(x)-x)^2-f(x)\}\,dx+\int_0^1 (h'(x))^2\,dx$$

で定める．このとき，等式

$$I=J$$

を証明しなさい．

(4) 関数$g(x)$は$g(0)=g(1)=0$を満たし，その導関数$g'(x)$は連続であるとする．このとき，不等式

$$\int_0^1 \{(g'(x)-x)^2-g(x)\}\,dx \geqq m$$

を証明しなさい．