

2016年 医学部 第4問

4 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また設問(3)に答えなさい。

時間 t とともに座標平面上を動く点 $P(t)$ は次の条件 (i) をみたすとする。

(i) $P(t)$ は原点をとらず、その偏角 $\theta(t)$ および原点からの距離 $r(t)$ は t について微分可能、かつ $r(0) = 1$ であり、さらに $\theta'(t) = 1$ が成り立つ。

(1) 動点 $P(t)$ の座標を $(x(t), y(t))$ とし、時刻 t における $P(t)$ の速度ベクトル $\vec{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ とベクトル $\vec{b}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ のなす角を $\alpha(t)$ とする。このとき $\cos\alpha(t)$ を $r(t)$ を用いて表すと $\cos\alpha(t) = \boxed{\text{あ}}$ である。

(2) 動点 $P(t)$ がさらに次の条件 (ii) をみたすとする。

(ii) すべての t に対して $\alpha(t) = \frac{\pi}{4}$ である。

このとき $r(t) = \boxed{\text{い}}$ である。

(3) 条件 (i), (ii) をみたす2つの動点 $P_1(t), P_2(t)$ の間に次の条件 (iii) が成り立つとする。ただし動点 $P_1(t), P_2(t)$ それぞれの偏角を $\theta_1(t), \theta_2(t)$, 原点からの距離を $r_1(t), r_2(t)$ とし、速度ベクトルを $\vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t)$ とする。

(iii) すべての t に対してベクトル $\vec{v}_1(t)$ とベクトル $\vec{v}_2(t)$ は垂直である。

このとき時刻 s から u の間に動点 $P_2(t)$ がその軌道に沿って動く道のりを $l(s, u)$ とすると

$$l(s, u) = \left| \overrightarrow{P_1(u)P_2(u)} \right| - \left| \overrightarrow{P_1(s)P_2(s)} \right|$$

が成り立つことを示しなさい。ただし $s < u$ とする。