0002356723467999

慶應義塾大学

2017年 理工学部 第2問　1枚目/2　増田

2 点Oを中心とする半径rの球面上に3点A，B，Cがあり，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2$であるとする．また，3点A，B，Cを通る平面を$\alpha$とし，点Oは平面$\alpha$上にないとする．さらに，△ABCの重心をGとし，直線OG上に点Dがあり，線分DGの中点が点Oであるとする．

(1) △ABCの面積は $\boxed{コ}$（3）であり，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\boxed{サ}$（$r^2-9$）である．

(2) 点Pの位置ベクトルは$\overrightarrow{OP}=-3\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$（$x$，$y$は実数）と表され，かつ直線OPは平面$\alpha$に直交しているとする．このとき，$x=\boxed{シ}$（4），$y=\boxed{ス}$（5）である．いま，$t$を実数とし，点Hを$\overrightarrow{DH}=t\overrightarrow{OP}$によって決まる点とすると，

$$\overrightarrow{AH}=\boxed{セ}\overrightarrow{OA}+\boxed{ソ}\overrightarrow{OB}+\boxed{タ}\overrightarrow{OC}$$

$-\frac{4}{3}-3t$　　$-\frac{1}{3}+4t$　　$-\frac{1}{3}+5t$

である．さらに，点Hが平面α上にあるとすると，$t=\boxed{チ}$（$\frac{1}{3}$）である．

(3) 四面体ABCDの体積は $\boxed{ツ}$（$2\sqrt{r^2-5}$）である．

(1) $(\triangle ABC\text{の面積})=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle CAB$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAB$ より

$$\cos\angle CAB=\frac{-2}{2\times\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\angle CAB=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

よって求める面積は $\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times2\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\underline{3}$ (コ)…

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2$ だから，

$$|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$r^2+r^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=4+10-2\times(-2)$$

$$2r^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=18$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\underline{r^2-9}\ \cdots(サ)$$

(2) $\overrightarrow{OP}$と平面αは直交しているので，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　かつ　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=(-3\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC})\cdot(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$
$$=3|\overrightarrow{OA}|^2+x|\overrightarrow{OB}|^2+(-3-x)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-y\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}$$

ここで，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2}=r^2-5$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=r^2-9$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2}{2}=r^2-2$$

これらを代入して

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=5x-7y+15=0$$

同様に

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=-4x+2y+6=0$$

$$\begin{cases}5x-7y+15=0\\-4x+2y+6=0\end{cases}$$ を解くと，

$x=\underline{4}\cdots$(シ)，$y=\underline{5}\cdots$(ス)

$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{OP}$ より，

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{OP}$$

ここで$\overrightarrow{AD}$を求める。

DGの中点がOだから

$$\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OG}}{2}=\overrightarrow{OO}=\vec{0}$$

2017年 理工学部 第2問　　2枚目/2　　増田

$\boxed{2}$ 点Oを中心とする半径 r の球面上に3点A，B，Cがあり，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2$ であるとする．また，3点A，B，Cを通る平面を α とし，点Oは平面 α 上にないとする．さらに，△ABCの重心をGとし，直線OG上に点Dがあり，線分DGの中点が点Oであるとする．

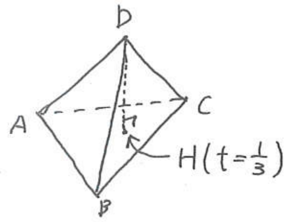
(1) △ABCの面積は $\boxed{\text{コ}}$ であり，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\boxed{\text{サ}}$ である．

(2) 点Pの位置ベクトルは $\overrightarrow{OP}=-3\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$（$x$，$y$ は実数）と表され，かつ直線OPは平面 α に直交しているとする．このとき，$x=\boxed{\text{シ}}$，$y=\boxed{\text{ス}}$ である．いま，t を実数とし，点Hを $\overrightarrow{DH}=t\overrightarrow{OP}$ によって決まる点とすると，

$$\overrightarrow{AH}=\boxed{\text{セ}}\,\overrightarrow{OA}+\boxed{\text{ソ}}\,\overrightarrow{OB}+\boxed{\text{タ}}\,\overrightarrow{OC}$$

である．さらに，点Hが平面 α 上にあるとすると，$t=\boxed{\text{チ}}$ である．

(3) 四面体ABCDの体積は $\boxed{\text{ツ}}$ である．



(2) つづき

$$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OG}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+t\,\overrightarrow{OP}$$

$$=\underbrace{\left(-\frac{4}{3}-3t\right)}_{(セ)}\overrightarrow{OA}+\underbrace{\left(-\frac{1}{3}+4t\right)}_{(ソ)}\overrightarrow{OB}+\underbrace{\left(-\frac{1}{3}+5t\right)}_{(タ)}\overrightarrow{OC}$$

点Hが平面 α 上にある

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OH}=○\overrightarrow{OA}+□\overrightarrow{OB}+△\overrightarrow{OC}$

$○+□+△=1$

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{OA}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-3t\right)\overrightarrow{OA}+\left(-\frac{1}{3}+4t\right)\overrightarrow{OB}+\left(-\frac{1}{3}+5t\right)\overrightarrow{OC}$$

係数を足すと $-1+6t=1$

$t=\frac{1}{3}$ …（チ）

(3)

（四面体ABCDの体積）

$=$（△ABCの面積）$\times|\overrightarrow{DH}|\times\frac{1}{3}$

$|\overrightarrow{DH}|$：$t=\frac{1}{3}$ のとき

$t=\frac{1}{3}$ のとき，

$$|\overrightarrow{DH}|^2=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{OP}|^2$$

$$=\frac{1}{9}(-3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC})\cdot(-3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC})$$

$$=\frac{1}{9}\left\{(9+16+25)r^2-24\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+40\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-30\,\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\right\}$$

[$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=r^2-5$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=r^2-9$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=r^2-2$ を代入]

$$=\frac{1}{9}(36r^2-180)$$

$$=4r^2-20$$

$$|\overrightarrow{DH}|=2\sqrt{r^2-5}$$

以上より 四面体ABCDの体積は

$$3\times2\sqrt{r^2-5}\times\frac{1}{3}=2\sqrt{r^2-5}\ \cdots(ツ)$$