

2017年 経済学部 第2問

2 t の関数 $f(t)$ は定数関数でないとし、すべての実数 α, β に対して次を満たすとする。

$$f(\alpha) \geq 1, \quad 2f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta)$$

(1) $f(0) = \boxed{10}$ であり、 $f(2\alpha) = \boxed{11} \{f(\alpha)\}^2 + \boxed{12} \boxed{13}$ が成り立つ。

(2) 方程式 $x + \frac{1}{x} = 2f(\alpha)$ を満たす x を考える。等式

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \boxed{14} \boxed{15}$$

を用いると、 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \boxed{16} f(\boxed{17} \alpha)$ となることがわかる。

(3) さらに、等式

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \boxed{18} \boxed{19} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

を用いると、 $x^3 + \frac{1}{x^3} = \boxed{20} f(\boxed{21} \alpha)$ となることがわかる。

(4) (2), (3) より、一般に、自然数 n に対して

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \boxed{22} f(\boxed{23} n\alpha) \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

が成り立つと推測される。この推測が正しいことを次のように確かめる。

$n = 1, 2, 3$ のとき $\textcircled{1}$ は成り立つ。3以上の自然数 k に対して、 $n = k - 1$ および $n = k$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると、等式

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \boxed{24} \boxed{25} \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

より、 $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \boxed{26} f(\boxed{27} (k + \boxed{28}) \alpha)$ が成り立つことがわかる。

よって、 $n = k + 1$ のときにも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

(5) $S_n = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k\alpha)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) とする。 $f(\alpha) > 1$ のとき、

$$S_n = \frac{1 + \boxed{29} \boxed{30} f(\alpha) + \boxed{31} \boxed{32} f((n-1)\alpha) + \boxed{33} \boxed{34} f(n\alpha)}{\boxed{35} \{1 - f(\alpha)\}}$$

となる。