

2016年 理工学部 第2問

2 $f(x)$ は 2 次関数であり, $f(0) = f(1) = 0$ を満たすとする.

(1) $a = \frac{1}{2}f''(0)$ とする. このとき, $f(x)$ は a を用いて $f(x) = \boxed{\text{キ}}$ と表される.

(2) 定積分

$$\int_0^1 \{(f'(x) - x)^2 - f(x)\} dx$$

の値が最も小さくなるのは $f(x) = \boxed{\text{ク}}$ のときである. また, そのときの定積分の値は $\boxed{\text{ケ}}$ である.

以下では, $f(x) = \boxed{\text{ク}}$, $m = \boxed{\text{ケ}}$ とする.

(3) 関数 $h(x)$ は $h(0) = h(1) = 0$ を満たし, その導関数 $h'(x)$ は連続であるとする. さらに, I と J を

$$I = \int_0^1 \{(f'(x) + h'(x) - x)^2 - (f(x) + h(x))\} dx$$

$$J = \int_0^1 \{(f'(x) - x)^2 - f(x)\} dx + \int_0^1 (h'(x))^2 dx$$

で定める. このとき, 等式

$$I = J$$

を証明しなさい.

(4) 関数 $g(x)$ は $g(0) = g(1) = 0$ を満たし, その導関数 $g'(x)$ は連続であるとする. このとき, 不等式

$$\int_0^1 \{(g'(x) - x)^2 - g(x)\} dx \geq m$$

を証明しなさい.