大阪市立大学

2014年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 座標空間内に4点A$(0,\ -1,\ 0)$, B$(2,\ 0,\ 1)$, C$(0,\ t,\ -1)$, D$(u,\ 2,\ 1)$がある．ただし，t, uは実数であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$は垂直であるとする．次の問いに答えよ．

(1) tの値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の両方に垂直で大きさが1のベクトル$\vec{n}=(p,\ q,\ r)$のうち$p>0$となるものを求めよ．

(3) 4点A，B，C，Dが同一平面に含まれるならば$u=4$であることを示せ．

(4) $u=3$のとき四面体ABCDの体積を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AB}=(2,1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(0,t+1,-1)$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ $\quad\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=t+1-1=0$ $\quad\therefore\ \underline{t=0}$ //

(2) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2p+q+r=0\ \cdots①$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(t+1)q-r=0$ $\quad\because$ (1)より $t=0$ なので, $q=r\ \cdots②$

①, ②より. $p=-r$, $q=r$ これを $p^2+q^2+r^2=1$ に代入して,

$r=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad p>0$ より $\underline{\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ //

(3) $\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$, $\overrightarrow{AC}\perp\vec{n}$ より. 点Dが平面ABC上にあるとき,

$\overrightarrow{AD}\perp\vec{n}$ である. $\overrightarrow{AD}=(u,3,1)$

$\therefore\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{\sqrt{3}}(u-3-1)=0$ $\quad\therefore\ u=4$ ■

(4) 点Dから平面ABCに下ろした垂線の足をHとおくと.

$\overrightarrow{DH}=k\vec{n}$ と表せる. $\quad\therefore\ \overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{\sqrt{3}}k(1,-1,-1)$

$\therefore\ \overrightarrow{AH}=\left(3+\frac{1}{\sqrt{3}}k,\ 3-\frac{1}{\sqrt{3}}k,\ 1-\frac{1}{\sqrt{3}}k\right)\ \cdots③$

またHは平面ABC上にあるので, $\overrightarrow{AH}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}=(2l,\ l+m,\ l-m)\ \cdots④$

③, ④より. $l=\frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}k$, $2l=4-\frac{2}{\sqrt{3}}k$ $\quad\therefore\ k=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ |\overrightarrow{DH}|=|k|\cdot|\vec{n}|=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ 体積は. $V=\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\underline{\frac{1}{3}}$ //