

2012年 情報工学部 第3問

3 Oを原点とする座標平面上に点  $P_0(1, 1)$ ,  $Q_0(1, 0)$ がある. ある  $p(0 < p < 1)$  に対して, 点  $P_1(p, p)$ ,  $Q_1(p, 0)$ を定め, さらに, 自然数  $n$  について点  $P_{n+1}$ ,  $Q_{n+1}$ を次のように定める.

- 点  $Q_n$  を通り直線  $Q_0P_1$  と平行な直線と, 直線  $OP_0$  の交点を  $P_{n+1}$  とする.
- 点  $P_{n+1}$  を通り  $y$  軸と平行な直線と,  $x$  軸の交点を  $Q_{n+1}$  とする.

また,  $\triangle Q_{n-1}P_nQ_n$  の面積を  $S_n$  とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $S_1$  を  $p$  を用いて表せ.
- (2) 点  $Q_{n-1}$  の  $x$  座標を  $q$  とするとき, 点  $Q_n$  の  $x$  座標を  $p, q$  を用いて表せ.
- (3)  $S_n$  を  $p, n$  を用いて表せ.
- (4)  $n$  を定数として,  $p$  を  $0 < p < 1$  の範囲で動かすとき,  $S_n$  を最大にする  $p$  とそのときの  $S_n$  をそれぞれ  $n$  を用いて表せ.
- (5) (4) で求めた  $S_n$  に対して,  $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$  を求めよ. 必要であれば, 自然対数の底  $e$  について  $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$  が成り立つことを用いてよい.

