大分大学

2017年 経済学部 第4問

増田

$\boxed{4}$ $a_1=3,\ \sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n + 1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

(1) n を2以上の自然数とするとき，a_{n+1} を a_n, a_{n-1} で表しなさい.

(2) $a_{n+1}-2a_n$ を n の式で表しなさい.

(3) a_n を n の式で表しなさい.

(1)

$$4a_n+1=\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}$$

$$-)\ 4a_{n-1}+1=\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n$$

(ただし $n\geqq 2$)

$$4a_n-4a_{n-1}=a_{n+1}$$

$$a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1} \quad \cdots ①$$

(2) ①の数列の特性方程式は

$$x^2=4x-4$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2=0$$

よって

$$a_{n+1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})$$

$b_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくと, b_n は

初項4, 公比2の等比数列

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1+a_2=4a_1+1$$

$$a_2=3a_1+1$$
$$=3\times3+1=10$$

$$b_1=a_2-2a_1$$
$$=10-2\times3=4$$

$$b_n=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$$

$$a_{n+1}-2a_n=2^{n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) $a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}$

両辺を 2^{n+1} で割る

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+1$$

$c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと,

$$c_{n+1}=c_n+1$$

c_n は初項 $\frac{3}{2}$, 公差1の等差数列

$$c_1=\frac{a_1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$c_n=\frac{3}{2}+(n-1)\cdot1$$
$$=n+\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_n}{2^n}=n+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a_n=n\cdot2^n+2^{n-1}$$

これは, $a_1=1\cdot2+2^0=3$ となるので, $n=1$ でも成り立つ

$$a_n=2^{n-1}(2n+1)$$

$(n=1,2,3,\cdots)$