首都大学東京

2014 年 第 2 問

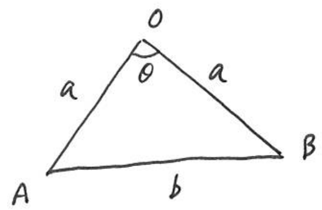
数理 石井K

[2] 空間内の 4 点 O, A, B, C について, どの 3 点も同一直線上にはないとする. また, 正の実数 a, b は $\sqrt{2}a < b < 2a$ を満たすとし, $OA = OB = OC = a$, $AB = BC = CA = b$ とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) 三角形OABは鈍角三角形であることを示しなさい.

(2) 線分OA, OB, OC上（ただし, 端点を除く）にそれぞれ点A′, B′, C′があり, 三角形A′B′C′は正三角形であるとする. このとき, 直線ABと直線A′B′は平行であることを示しなさい.

(1) 余弦定理より



$$\cos\angle AOB = \frac{2a^2 - b^2}{2a^2} < \frac{2a^2 - 2a^2}{2a^2} = 0$$

$\therefore \angle AOB$: 鈍角 ▨

(2) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおき.

$\overrightarrow{OA'} = s\vec{a}$, $\overrightarrow{OB'} = t\vec{b}$, $\overrightarrow{OC'} = u\vec{c}$ とする $(0<s<1,\ 0<t<1,\ 0<u<1)$

$$|\overrightarrow{A'B'}|^2 = |t\vec{b} - s\vec{a}|^2 = t^2|\vec{b}|^2 + s^2|\vec{a}|^2 - 2st\,\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2(s^2+t^2) - 2st\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

また (1) より. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\angle AOB = \dfrac{2a^2 - b^2}{2}$

$$\therefore |\overrightarrow{A'B'}|^2 = a^2(s-t)^2 + st\,b^2$$

同様に, $|\overrightarrow{B'C'}|^2 = a^2(t-u)^2 + tu\,b^2$, $|\overrightarrow{C'A'}|^2 = a^2(u-s)^2 + us\,b^2$

$|\overrightarrow{A'B'}|^2 = |\overrightarrow{B'C'}|^2$ より $a^2\{(s-t)^2 - (t-u)^2\} + tb^2(s-u) = 0$

$$\therefore a^2\{(s-t+t-u)(s-t-t+u)\} + tb^2(s-u) = 0$$

$$(s-u)\{(s+u)a^2 + (b^2 - 2a^2)t\} = 0$$

ここで, $\sqrt{2}a < b$ より. $2a^2 < b^2$ $\therefore (s+u)a^2 + (b^2-2a^2)t > 0$

$\therefore s = u$ 同様にして. $t = u$ $\therefore s = t = u$

これより. $\overrightarrow{A'B'} = s\vec{b} - s\vec{a} = s\overrightarrow{AB}$ となり ABとA′B′は平行 ▨