

2012年 経済・地域政策 第1問

1枚目/2枚


 数理解石井

1 以下の各問に答えよ。

- (1) 3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 6$ がある。 $f'(1) = 7$, $f'(-2) = 4$ となるように定数 a , b の値を定めよ。
- (2) 次の計算をせよ。ただし、 $i^2 = -1$ である。 $\frac{2-i}{1+2i}$
- (3) $(2x^2 - 1)^6$ を展開したとき、 x^4 の項の係数を求めよ。
- (4) 20本のくじがあり、当たりくじの賞金と本数は1等1000円が1本、2等500円が2本、3等300円が3本である。ただし、はずれくじの賞金は0円である。いま、この中から1本のくじを引くときの賞金の期待値を求めよ。
- (5) x は実数とする。命題「 $x > 0 \implies |-x| > |x-1|$ 」の真偽を答えよ。また、偽であるときは反例をあげよ。
- (6) 初項1, 公比9の等比数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) を考える。不等式

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq 2^{20} - 2^{-3}$$

を満たす最大の整数 k の値を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

- (7) $\sqrt[12]{20000}$, $\sqrt[3]{6+4\sqrt{3}}$, $\sqrt[2]{4+\sqrt{2}}$ の3数の大小を比較せよ。
- (8) 三角形 OAB において、辺 OA を 2:3 に内分する点を C, 辺 OB を 2:1 に内分する点を D, 2直線 AD, BC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ として、ベクトル \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

$$(1) f'(x) = 3ax^2 + 2bx \text{ より } f'(1) = 3a + 2b = 7 \dots \textcircled{1} \quad f'(-2) = 12a - 4b = 4 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \text{ より } 18a = 18 \quad \therefore a = 1 \text{ のとき } b = 2$$

$$(2) \left(\frac{2-i}{1+2i}\right) = \frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-4i-i-2}{1+4} = \frac{-i}{5}$$

$$(3) \text{二項定理より } x^4 \text{ の項は } {}_6C_2 \times 2^2 \times (-1)^4 \times x^4 = 60x^4 \quad \therefore 60$$

$$(4) \text{(期待値)} = \frac{1}{20} \times 1000 + \frac{2}{20} \times 500 + \frac{3}{20} \times 300 + \frac{14}{20} \times 0 = 145 \text{ 円}$$

$$(5) \underline{\text{偽である}} \text{ ,, (反例) } x = \frac{1}{3} \text{ のとき } |-x| = \frac{1}{3}, |x-1| = \frac{2}{3} \text{ となり}$$

$$|-x| < |x-1| \text{ となる}$$

$$(6) a_n = 9^{n-1} \text{ より (左辺)} = \frac{1-9^k}{1-9} = \frac{9^k-1}{8}$$

$$\therefore \text{(不等式)} \iff 9^k - 1 \leq 2^{23} - 1 \iff 9^k \leq 2^{23} \iff 3^{2k} \leq 2^{23}$$

$$\text{対数をとると, } 2k \log_{10} 3 \leq 23 \log_{10} 2 \quad \therefore k \leq \frac{23 \log_{10} 2}{2 \log_{10} 3} \doteq 7.255 \quad \therefore k = 7$$

2012年 経済・地域政策 第1問

2枚目/2枚

1 以下の各問に答えよ。

- (1) 3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 6$ がある. $f'(1) = 7$, $f'(-2) = 4$ となるように定数 a , b の値を定めよ.
- (2) 次の計算をせよ. ただし, $i^2 = -1$ である. $\frac{2-i}{1+2i}$
- (3) $(2x^2 - 1)^6$ を展開したとき, x^4 の項の係数を求めよ.
- (4) 20本のくじがあり, 当たりくじの賞金と本数は1等1000円が1本, 2等500円が2本, 3等300円が3本である. ただし, はずれくじの賞金は0円である. いま, この中から1本のくじを引くときの賞金の期待値を求めよ.
- (5) x は実数とする. 命題「 $x > 0 \implies |-x| > |x-1|$ 」の真偽を答えよ. また, 偽であるときは反例をあげよ.
- (6) 初項1, 公比9の等比数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) を考える. 不等式

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq 2^{20} - 2^{-3}$$

を満たす最大の整数 k の値を求めよ. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

- (7) $\sqrt[12]{20000}$, $\sqrt[3]{6+4\sqrt{3}}$, $\sqrt[2]{4+\sqrt{2}}$ の3数の大小を比較せよ.
- (8) 三角形 OAB において, 辺 OA を $2:3$ に内分する点を C , 辺 OB を $2:1$ に内分する点を D , 2直線 AD , BC の交点を P とする. $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ として, ベクトル \vec{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.

(7) すべて正なので, それぞれ12乗して大小を比較する.

$$\left(\sqrt[12]{20000}\right)^{12} = 20000, \quad \left(\sqrt[3]{6+4\sqrt{3}}\right)^{12} = (6+4\sqrt{3})^4 = (84+48\sqrt{3})^2 \\ = 13968 + 8064\sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt[2]{4+\sqrt{2}}\right)^{12} = (4+\sqrt{2})^6 = 8(9+4\sqrt{2})^3 = 12744 + 8800\sqrt{2}$$

$$\therefore \left(\sqrt[3]{6+4\sqrt{3}}\right)^{12} > 13968 + 8000 \times 1.73 = 27808$$

$$\left(\sqrt[2]{4+\sqrt{2}}\right)^{12} < 12744 + 8800 \times 1.5 = 25944$$

$$\therefore \sqrt[3]{6+4\sqrt{3}} > \sqrt[2]{4+\sqrt{2}} > \sqrt[12]{20000} //$$

(8) メネラウスの定理より. $\frac{AC}{OC} \cdot \frac{OB}{BD} \cdot \frac{PD}{AP} = 1$

$$\therefore \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{PD}{AP} = 1 \iff AP:PD = 9:2$$

$$\therefore \vec{OP} = \frac{2}{11}\vec{a} + \frac{9}{11}\vec{OD} \quad \vec{OD} = \frac{2}{3}\vec{b} \text{ より} \quad \vec{OP} = \frac{2}{11}\vec{a} + \frac{6}{11}\vec{b} //$$

