旭川医科大学

2014年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 一列に並んだ3つの部屋A，B，Cがあり，2頭の象がいる．2頭の象は毎日1つの部屋から隣の部屋に，次のルールに従って移動する．

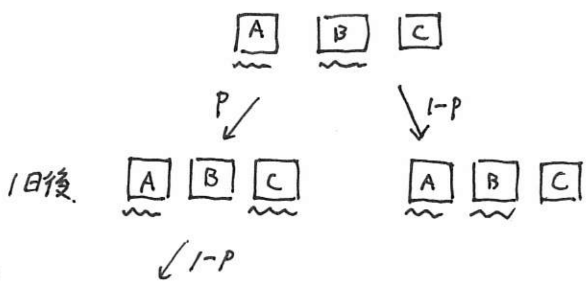
$0 < p < 1$ とし，象が部屋Aと部屋Bにいるとき，部屋Aにいる象は部屋Aに留まり，部屋Bにいる象が確率 p で部屋Cに移る．象が部屋Bと部屋Cにいるとき，部屋Cにいる象は部屋Cに留まり，部屋Bにいる象が確率 $1-p$ で部屋Aに移る．象が部屋Aと部屋Cにいるとき，部屋Aにいる象が確率 p で部屋Bに移り，移らない場合は部屋Cにいる象が部屋Bに移る．2頭の象が同時に同じ部屋にいることはできない．

はじめに2頭の象はそれぞれ部屋Aと部屋Bにいるものとし，$2n$ 日後に象が部屋Aにいる確率を a_n $(n=1, 2, \cdots)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3) $p=\dfrac{2}{3}$ のとき，a_n を求めよ．



(1) 2日後に象がAにいる確率 a_1

$$a_1 = p\cdot(1-p)+1-p$$
$$= \underline{1-p^2}$$

(2) はじめにAとCにいる場合も $a_1=1-p^2$ となるので

$$a_{n+1} = (1-p^2)a_n + \{(1-p)^2+p(1-p)\}(1-a_n)$$
$$= \underline{p(1-p)a_n + 1-p}$$

(3) (2)に $p=\frac{2}{3}$ を代入して．

$$a_{n+1} = \frac{2}{9}a_n + \frac{1}{3}$$

$$a_{n+1}-\frac{3}{7} = \frac{2}{9}\left(a_n-\frac{3}{7}\right)$$

$\therefore \left\{a_n-\frac{3}{7}\right\}$ は初項 $a_1-\frac{3}{7} = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{3}{7} = \frac{8}{63}$，公比 $\frac{2}{9}$ の数列

$\therefore a_n-\frac{3}{7} = \frac{8}{63}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$ $\therefore a_n = \underline{\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\left(\frac{2}{9}\right)^n}$