県立広島大学

2015年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ s, tを実数とし，原点をOとする座標空間に定点A(0, 2, 0)と動点P(s, $s+2$, t)がある．$\overrightarrow{AP}$は，$\overrightarrow{OP}$と垂直であるか $\overrightarrow{0}$ である．次の問いに答えよ．

(1) t^2をsを用いて表せ．

(2) y軸上の定点B(0, k, 0)に対して，動点Pが変化しても$|\overrightarrow{BP}|$が常に一定となる定数kの値を求めよ．

(3) $|\overrightarrow{OP}|$のとる値の範囲を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AP} = (s, s, t)$, $\overrightarrow{OP} = (s, s+2, t)$

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{OP}$ または $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{0}$ より，$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OP} = s^2 + s(s+2) + t^2 = 0$　　よって，$\underline{t^2 = -2s^2 - 2s}$ //

(2) $\overrightarrow{BP} = (s, s+2-k, t)$ より．

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{BP}|^2 &= s^2 + (s+2-k)^2 + t^2 \\
&= s^2 + s^2 + 4 + k^2 - 2sk - 4k + 4s + (-2s^2 - 2s) \\
&= s(2-2k) + k^2 - 4k + 4
\end{aligned}
$$

∴ sが変化しても$|\overrightarrow{BP}|$が常に一定となるのは，$2-2k=0$　すなわち，$\underline{k=1}$ //

(3)
$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{OP}|^2 &= s^2 + (s+2)^2 + t^2 \\
&= s^2 + s^2 + 4s + 4 - 2s^2 - 2s \\
&= 2s + 4
\end{aligned}
$$

ここで，$-2s^2 - 2s = t^2 \geqq 0$ であるから，

$-2s(s+1) \geqq 0$

$\therefore\ s(s+1) \leqq 0$

$\therefore\ -1 \leqq s \leqq 0$

このとき，$2 \leqq 2s+4 \leqq 4$ より，$2 \leqq |\overrightarrow{OP}|^2 \leqq 4$

$\therefore\ \underline{\sqrt{2} \leqq |\overrightarrow{OP}| \leqq 2}$ //