0002315634867999

広島工業大学

2016年 工・情報・環境学部 (A) 第2問

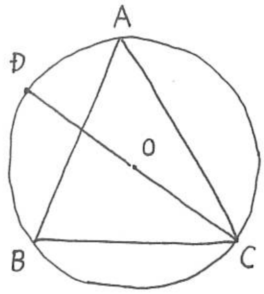
数理 石井K

$\boxed{2}$ 中心O，半径2の円に内接する△ABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．また，CDをこの円の直径とし，$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}=\vec{p}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\vec{c}=-\vec{p}$ が成り立つとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求め，∠AOBを求めよ．

(3) kが実数で $\vec{c}=k\vec{p}$ が成り立つとき，AC＝BCであることを証明せよ．



(1) $\vec{p}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}$

$=\vec{a}-\overrightarrow{OD}+\vec{b}-\overrightarrow{OC}$

CDは円の直径より $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OD}$

$\therefore\ \underline{\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}}$ //

(2) $\vec{c}=-\vec{p} \iff \vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$

$\therefore\ |\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$ より

$4=4+4+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\therefore\ \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=-2}$ //

$\cos\angle AOB=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \underline{\angle AOB=120^\circ}$ //

(3) $\vec{c}=k\vec{p} \iff \vec{c}=k(\vec{a}+\vec{b})$

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|(k-1)\vec{a}+k\vec{b}|^2=(k-1)^2\cdot 4+k^2\cdot 4+2k(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=4(2k^2-2k+1)+2k(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|k\vec{a}+(k-1)\vec{b}|^2=k^2\cdot 4+(k-1)^2\cdot 4+2k(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=4(2k^2-2k+1)+2k(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\therefore\ |\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$ より　AC＝BC ▨