

2014年工学部第2問


 数理解石井K

2 初項1, 公比2の等比数列を, 次のように第 n 群が n 個の数から成るように分ける.

(1), (2, 2^2), (2^3 , 2^4 , 2^5), (2^6 , 2^7 , 2^8 , 2^9), ...

このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 2^{30} は第何群に属するかを求めよ.
 (2) 第 n 群の最初の項を求めよ.
 (3) 第 n 群に属する項の総和を求めよ.

(1) 第 n 群には n 個の数があるから.

$$\sum_{k=1}^n k > 30 \text{ とする } n \text{ は. } \frac{1}{2} n(n+1) > 30$$

$$\therefore n(n+1) > 60 \quad \text{これをみたす最小の } n \text{ は } n=8$$

\therefore 第8群

(2) 第 $n-1$ 群までには ($n \geq 2$)

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} \cdot (n-1)n \text{ 個の数が出るから.}$$

$$\text{第 } n-1 \text{ 群の最後の項は } 2^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}$$

$$\therefore \text{第 } n \text{ 群の最初の項は } 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \text{これは } n=1 \text{ のときも成り立つ}$$

(3) (2) より

$$\text{第 } n \text{ 群の項は. } 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \sim 2^{\frac{n^2+n-2}{2}}$$

これは初項 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, 公比2の等比数列の和なので

$$S = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}} (1-2^n)}{1-2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} (2^n - 1)$$