

2013年B方式第2問

2  $a, b$  は互いに素な整数とする.

- (1) もし  $a^2 = 2b^2$  ……①が成立するなら,  $a$  は偶数であることを証明せよ.  
 (2) ①の  $b$  も偶数であることを証明せよ.  
 (3) ①が成立することはないということを証明せよ.

(1) ①の右辺は  $2 \times$  整数であるから偶数である

このことから左辺も偶数になる.

 $a$  は整数であるから  $a = 2k$  と  $a = 2k-1$  ( $k$  は整数) の場合で  $a^2$  を計算すると,

- $a = 2k$  のとき  $a^2 = 4k^2$  (偶数)

- $a = 2k-1$  のとき  $a^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4(k^2 - k) + 1$  (奇数)

 $\therefore a^2$  が偶数となるのは  $a = 2k$  のとき すなわち  $a$  は偶数  $\square$ (2) (1) より  $a = 2k$  ( $k$  は整数) とおくことができる.

このとき①式は,

$$4k^2 = 2b^2 \text{ となり, } 2k^2 = b^2$$

よって (1) と同様の議論により  $b$  も偶数  $\square$ (3) (1), (2) より  $a, b$  はともに偶数となるが,これは  $a, b$  が互いに素であることに矛盾しているよって ①をみたす互いに素な整数  $a, b$  は存在しない  $\square$ 

(参考) 2014年九州大学 文理共通 大問 ② とよく似ている