

2015年人間科学第5問

 教理
石井K

5 以下の間に答えよ。

- (1) m を整数とすると、 m^2 が偶数ならば、 m は偶数であることを証明せよ。
 (2) $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(1) 命題とその対偶は真偽が一致するので対偶

「 m が奇数ならば m^2 は奇数」

を証明する。

 $m = 2k + 1$ (k : 整数) のとき。

$$m^2 = (2k + 1)^2$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

 $2k^2 + 2k$ は整数であるから、 m^2 は奇数

∴ 対偶は成り立つから、元の命題も成り立つ ◻

(2) 背理法で証明する。

 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定し、

$$\sqrt{2} = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{ は互いに素な整数}) \text{ とおく。}$$

両辺2乗して整理すると、

$$2p^2 = q^2 \quad \dots (*)$$

(左辺) は偶数であるから、 q^2 は偶数よって (1) より、 q は偶数、…①ここで $q = 2r$ (r は整数) と表せるので (*) に代入すると、

$$2p^2 = 4r^2$$

$$\therefore p^2 = 2r^2$$

(右辺) は偶数であるから、 p^2 は偶数。よって (1) より、 p は偶数、…②①、②より、 p, q は互いに素であることに矛盾。よって、 $\sqrt{2}$ は無理数である ◻