2013年 薬学部 第5問

1枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{5}$ x の整式 $f(x)$ と $g(x)$ が

$$f(x) = x\int_0^1 g(t)\,dt + \int_{-1}^1 g(t)\,dt + 1, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

を満たすとき，

$$f(x) = \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}x + \frac{\boxed{5}}{\boxed{4}}, \quad g(x) = \frac{\boxed{3}}{\boxed{8}}x^2 + \frac{\boxed{5}}{\boxed{4}}x$$

である．さらに，方程式 $f(x) - g(x) = 0$ の2つの解を α, β $(\alpha < \beta)$ とすると，

$$\int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\}\,dx = \frac{\boxed{1}\boxed{7}\sqrt{\boxed{3}\boxed{4}}}{\boxed{2}\boxed{7}},$$

$$\int_\alpha^\beta \{f(x) + g(x)\}\,dx = \frac{\boxed{1}\boxed{0}\sqrt{\boxed{3}\boxed{4}}}{\boxed{2}\boxed{7}}$$

である．

$f(x) = ax + b + 1$ …① とおく．$\left(a = \int_0^1 g(t)\,dt,\ b = \int_{-1}^1 g(t)\,dt \text{ とおいた}\right)$

このとき，$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$= \left[\frac{1}{2}at^2 + bt + t\right]_0^x$

$= \frac{1}{2}ax^2 + bx + x$ …②

$\therefore\ a = \int_0^1 \frac{1}{2}at^2 + bt + t\,dt = \left[\frac{1}{6}at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$

これより，$5a - 3b = 3$ …③

$b = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}at^2 + \underbrace{bt + t}_{\text{奇関数}}\,dt = 2\int_0^1 \frac{1}{2}at^2\,dt = \left[\frac{1}{3}at^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}a$

$\therefore\ b = \frac{1}{3}a$ …④　　③と④より，$a = \frac{3}{4}$，$b = \frac{1}{4}$

①に代入して，$\underline{f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}}$ //

②に代入して，$\underline{g(x) = \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{4}x}$ //

2013年 薬学部 第5問　　2枚目/2枚

数理 石井K

5 x の整式 $f(x)$ と $g(x)$ が

$$f(x) = x\int_0^1 g(t)\,dt + \int_{-1}^1 g(t)\,dt + 1, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

を満たすとき,

$$f(x) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}x + \frac{\boxed{}}{\boxed{}}, \quad g(x) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}x^2 + \frac{\boxed{}}{\boxed{}}x$$

である. さらに, 方程式 $f(x) - g(x) = 0$ の 2 つの解を α, β $(\alpha < \beta)$ とすると,

$$\int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\}\,dx = \frac{\boxed{}\boxed{}\sqrt{\boxed{}\boxed{}}}{\boxed{}\boxed{}},$$

$$\int_\alpha^\beta \{f(x) + g(x)\}\,dx = \frac{\boxed{}\boxed{}\sqrt{\boxed{}\boxed{}}}{\boxed{}\boxed{}}$$

である.

$f(x) - g(x) = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ より 解と係数の関係より.

$$\alpha + \beta = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}} = -\frac{4}{3}, \quad \alpha\beta = \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{3}{8}} = -\frac{10}{3}$$

$$\therefore \int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\}\,dx = -\frac{3}{8}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

ここで $(\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{16}{9} - 4\cdot\left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{136}{9}$

$\beta > \alpha$ より $\beta - \alpha = \frac{2\sqrt{34}}{3}$ 　 $\therefore \int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\}\,dx = \frac{1}{16}\left(\frac{2\sqrt{34}}{3}\right)^3 = \underline{\frac{17\sqrt{34}}{27}}$ //

$\int_\alpha^\beta \{f(x) + g(x)\}\,dx + \int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\}\,dx = 2\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ であり.

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}\,dx = \left[\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{4}x\right]_\alpha^\beta = \frac{3}{8}(\beta^2 - \alpha^2) + \frac{5}{4}(\beta - \alpha)$$

$$\therefore \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{3}{8}\cdot\frac{2\sqrt{34}}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{5}{4}\cdot\frac{2\sqrt{34}}{3} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\therefore \int_\alpha^\beta \{f(x) + g(x)\}\,dx = \sqrt{34} - \frac{17\sqrt{34}}{27}$$

$$= \underline{\frac{10}{27}\sqrt{34}}$$ //