



2012年 農学部 第5問

5  $\triangle ABC$ において、 $OA = a$ 、 $OB = b$ 、 $\angle AOB = \theta$ とおく。ただし、 $a \geq b$ および $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。点Bから辺OAに下ろした垂線の足を $A_1$ とする。また点 $A_1$ を通って辺ABに平行な直線と、辺OBとの交点を $B_1$ とする。次に点 $B_1$ から辺 $OA_1$ に下ろした垂線の足を $A_2$ とし、点 $A_2$ を通って辺 $A_1B_1$ に平行な直線と、辺 $OB_1$ との交点を $B_2$ とする。以下、この操作を続け、三角形の列

$$\triangle OA_1B_1, \triangle OA_2B_2, \dots, \triangle OA_nB_n$$

をとる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $\triangle OA_nB_n$ は、 $\triangle OAB$ に相似であることを示せ。
- (2)  $\frac{A_nB_n}{A_{n-1}B_{n-1}}$ を $a$ 、 $b$ 、 $\theta$ の式で表せ。
- (3)  $\triangle OA_kB_k$ の面積を $S_k$ とする。 $a = 2$ 、 $b = 1$ 、 $\theta = 30^\circ$ のとき、 $S_1 + S_2 + \dots + S_n$ を $n$ の式で表せ。