0001866723318999

鳥取大学

2014年 地域 第3問

$\boxed{3}$ 実数の定数 a, b に対し，関数 $f(x) = \sin^2 2x - a(4\cos^2 x - \cos 2x - 2) + b$ が与えられている．

(1) $t = \cos 2x$ として $f(x)$ を t, a, b を用いて表せ．

(2) すべての実数 x に対して不等式 $-1 \leqq f(x) \leqq 3$ が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

(1) $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$， $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ より．

$$f(x) = 1 - \cos^2 2x - a\left(4 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} - \cos 2x - 2\right) + b$$

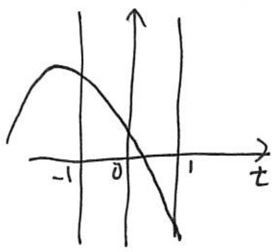
$$= 1 - t^2 - a(2 + 2t - t - 2) + b$$

$$= \underline{-t^2 - at + 1 + b}$$

(2) x がすべての実数を動くとき．$-1 \leqq t \leqq 1$

$$f(x) = -\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + 1 + b \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

(i) $a > 2$ のとき．



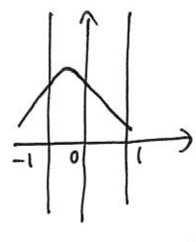
最大値は

$a + b \leqq 3$

最小値は

$-a + b \geqq -1$

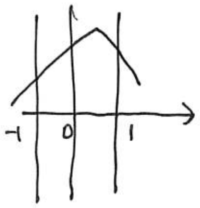
(ii) $0 < a \leqq 2$ のとき



最大値は $\dfrac{a^2}{4} + 1 + b \leqq 3$

最小値は $-a + b \geqq -1$

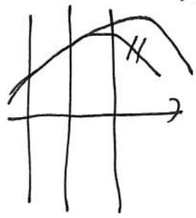
(iii) $-2 < a \leqq 0$ のとき



最大値は $\dfrac{a^2}{4} + 1 + b \leqq 3$

最小値は $a + b \geqq -1$

(iv) $a \leqq -2$ のとき



最大値は $-a + b \leqq 3$

最小値は $a + b \geqq -1$

右図のようになる

(境界線も含む)