

2010年工学部第3問

数理
石井K

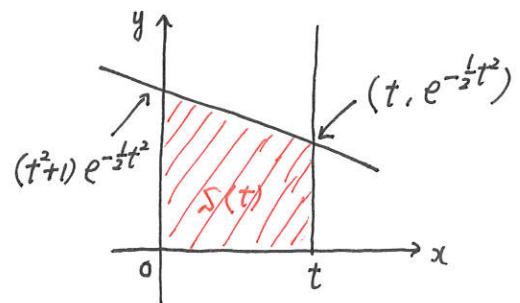
3 曲線 $C: y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ について以下の問いに答えなさい。

- (1) 曲線 C 上の点 $P(t, e^{-\frac{1}{2}t^2})$ における接線の方程式を求めなさい。
 (2) (1)の接線と x 軸, y 軸および直線 $x = t$ で囲まれる台形の面積を $S(t)$ とする. $t > 0$ の範囲で t が動くとき, $S(t)$ の最大値を与える t とその最大値を求めなさい。

(1) $y' = -x e^{-\frac{1}{2}x^2}$ より. 接線は $y = -t e^{-\frac{1}{2}t^2} (x-t) + e^{-\frac{1}{2}t^2}$
 $\therefore y = -t e^{-\frac{1}{2}t^2} x + (t^2+1) e^{-\frac{1}{2}t^2}$ //

(2) 接線と y 軸の交点は $(0, (t^2+1)e^{-\frac{1}{2}t^2})$

~~x 軸との交点は $(t + \frac{1}{t}, 0)$~~
 便利なからた



$$\begin{aligned} \therefore S(t) &= \frac{1}{2} \cdot (t^2+1) e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot t \\ &= \frac{1}{2} (t^3+2t) e^{-\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S'(t) &= \frac{1}{2} (3t^2+2) e^{-\frac{1}{2}t^2} + \frac{1}{2} (t^3+2t) \cdot (-t) \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \\ &= -\frac{1}{2} (t^2-2)(t^2+1) e^{-\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

$\therefore t > 0$ で $S'(t) = 0$ となるのは

$$t = \sqrt{2}$$

\therefore 増減表より.

t	(0)	\dots	$\sqrt{2}$	\dots
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		\nearrow	$\frac{2\sqrt{2}}{e}$	\searrow

$S(t)$ の最大値は. $\frac{2\sqrt{2}}{e}$ ($t = \sqrt{2}$ のとき)