

2011 年 基幹理工・創造理工・先進理工 第3問

3  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  とする. 以下の問に答えよ.

- (1)  $y = f(x)$  のグラフの概形を次の点に注意して描け:  $f(x)$  の増減, グラフの凹凸,  $x \rightarrow +0$ ,  $x \rightarrow \infty$  のときの  $f(x)$  の挙動.
- (2)  $n$  を自然数とする.  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して  $x$  が  $e^{\frac{k-1}{n}} \leq x \leq e^{\frac{k}{n}}$  を動くときの  $f(x)$  の最大値を  $M_k$ , 最小値を  $m_k$  とし,

$$A_n = \sum_{k=1}^n M_k (e^{\frac{k}{n}} - e^{\frac{k-1}{n}})$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n m_k (e^{\frac{k}{n}} - e^{\frac{k-1}{n}})$$

とおく.  $A_n, B_n$  を求めよ.

- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  および  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$  を求めよ.
- (4) 各  $n$  に対して  $B_n < \int_1^e f(x) dx < A_n$  であることを示せ.