2014年 第3問

$\boxed{3}$ $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $x \neq -1$ のとき，$\frac{1}{x+1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k + \frac{(-x)^n}{x+1}$ が成立することを証明せよ．

(2) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，不等式 $-\frac{1}{n+1} \leqq \int_0^1 \frac{(-x)^n}{x+1}\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$ が成立することを証明せよ．

(3) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (-x)^k\,dx$ が成立することを証明せよ．

(4) $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

初項1，公比 $-x\ (\neq 1)$ の等比数列の和

(1) $\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1-(-x)^n}{1+x}$

$\therefore \sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k + \frac{(-x)^n}{x+1} = \frac{1}{x+1}$ ■

(2) $\left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{x+1}\,dx\right| = \left|\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx\right|$

$x+1>1$ より．

$\leqq \int_0^1 x^n\,dx$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$= \frac{1}{n+1}$

よって，

$-\frac{1}{n+1} \leqq \int_0^1 \frac{(-x)^n}{x+1}\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$ ■

(3) $\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (-x)^k\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$

$= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$= S_n$ ■

(4) $S_n = \int_0^1\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k\right\}dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x+1} - \frac{(-x)^n}{x+1}\,dx}_{(1)より.} = \log 2 - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{x+1}\,dx$

(2)より．

$\therefore \log 2 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \leqq S_n \leqq \log 2 + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0}$

はさみうちの原理より．$\lim_{n\to\infty} S_n = \underline{\log 2}$ //