



2014年人文社会科学第2問

2 n を自然数とし、次の漸化式で2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定める。

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_{n+3} = 3b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ。ただし、必要ならば、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いよ。

- (1) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の最初の6項をそれぞれ求めよ。
- (2) $a_{n+6} = 8a_n$ となることを示せ。
- (3) m を0以上の整数とすると、 a_{6m+1} と b_{6m+1} を m を用いて表せ。
- (4) 6で割った余りが1となるような n で、 $a_n \geq b_n$ となるものをすべて求めよ。
- (5) 6で割った余りが3となるような n で、 $a_n \geq b_n$ となるものをすべて求めよ。

$$(1). a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2a_1 = 2, a_4 = 2a_2 = 2, a_5 = 2a_3 = 4, a_6 = 2a_4 = 4$$

$$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 3b_1 = 3, b_5 = 3b_2 = 3, b_6 = 3b_3 = 3 \quad \text{——〃}$$

$$(2) a_{n+6} = 2a_{n+4} = 2 \cdot 2a_{n+2} = 2 \cdot 2 \cdot 2a_n = 8a_n \quad \text{——〃}$$

$$(3) a_{6m+1} = 8 \cdot a_{6m-5} = 8^2 \cdot a_{6m-11} = \dots = 8^m \cdot a_1 = 8^m \quad \text{——〃}$$

$$(2) \text{と同様に考えると } b_{n+6} = 3 \cdot b_{n+3} = 9b_n$$

$$\therefore b_{6m+1} = 9b_{6m-5} = 9^2 \cdot b_{6m-11} = \dots = 9^m \cdot b_1 = 9^m \quad \text{——〃}$$

$$(4). (3) \text{より } a_{6m+1} \geq b_{6m+1} \text{ は } 8^m \geq 9^m \quad \therefore m=0 \text{ するとき } n=1 \quad \text{——〃}$$

$$(5) a_{6m+3} = 8 \cdot a_{6m-3} = \dots = 8^m \cdot a_3 = 2 \cdot 8^m$$

$$b_{6m+3} = 9 \cdot b_{6m-3} = \dots = 9^m \cdot b_3 = 9^m$$

$$\therefore a_n \geq b_n \iff 2 \cdot 8^m \geq 9^m$$

$$\therefore \left(\frac{9}{8}\right)^m \leq 2. \quad \text{両辺底10を対数をとると}$$

$$m(\log_{10} 9 - \log_{10} 8) \leq \log_{10} 2$$

$$\therefore m \leq \frac{\log_{10} 2}{2 \log_{10} 3 - 3 \log_{10} 2} \doteq \frac{0.301}{0.9542 - 0.903} \doteq 5.88$$

$$\therefore m = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad \text{するとき } n = 3, 9, 15, 21, 27, 33 \quad \text{——〃}$$