2013年 地域 第4問

4 自然数の数列 $\{a_n\}$ の隣り合う2項に次の関係式が成り立つ．

$$\frac{a_{n+1}}{{a_n}^2} = 3^n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

また，$a_1 = 1$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \log_3 a_n$ とおくとき，b_n を n の式で表せ．

(2) $a_n \geqq 10^{100}$ となる最小の n を求めよ．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(1) 関係式において，両辺底が3の対数をとると，

$$\log_3 \frac{a_{n+1}}{{a_n}^2} = n$$

よって，$\log_3 a_{n+1} - 2\log_3 a_n = n$

$\therefore\ b_{n+1} = 2b_n + n$

$\therefore\ b_{n+1} + (n+1) = 2(b_n + n) + 1$

$\therefore\ b_{n+1} + (n+2) = 2(b_n + n + 1)$

$\therefore$ 数列 $\{b_n + n + 1\}$ は，初項 $b_1 + 2 = \log_3 1 + 2 = 2$，公比2の等比数列

$\therefore\ b_n + n + 1 = 2^n$

$\therefore\ \underline{b_n = 2^n - n - 1}$ //

(2) $a_n \geqq 10^{100} \iff \log_{10} a_n \geqq 100$

$$\iff \frac{\log_3 a_n}{\log_3 10} \geqq 100$$

$$\iff b_n \geqq 100 \cdot \log_3 10$$

$$\iff 2^n - n - 1 \geqq 100 \cdot \frac{1}{\log_{10} 3}$$

$$\iff 2^n - n \geqq \frac{100}{0.4771} + 1$$

$$\iff 2^n - n \geqq 210.599\cdots$$

n：自然数として，$f(n) = 2^n - n$ とおくと，$f(n)$ は単調増加であり，

$f(7) = 128 - 7 = 121$，$f(8) = 256 - 8 = 248$

$\therefore\ \underline{n = 8}$ //