



2014年教育第4問

4 2個以上の正の整数を要素とする有限集合を  $A$  とする.

$A$  のどの2数も一方が他方を割り切るとき  $A$  は良い集合であるといい,  $A$  のどの2数も互いに他を割り切らないとき  $A$  は悪い集合であるという.

また,  $A$  の良い部分集合の要素の個数の最大値, すなわち,

$$\max \{n(B) \mid B \subset A, n(B) \geq 2 \text{ かつ } B \text{ は良い集合}\}$$

を  $A$  の最良数と定義し,  $A$  の悪い部分集合の要素の個数の最大値, すなわち,

$$\max \{n(B) \mid B \subset A, n(B) \geq 2 \text{ かつ } B \text{ は悪い集合}\}$$

を  $A$  の最悪数と定義する.

たとえば,  $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 14, 15, 77, 154, 225, 231, 308\}$  のとき,  $A$  の良い部分集合は  $\{7, 77, 231\}$ ,  $\{7, 14, 154, 308\}$ ,  $\{11, 77, 154, 308\}$  などであり,  $A$  の最良数は4である. また,  $A$  の悪い部分集合は  $\{231, 308\}$ ,  $\{14, 15, 77\}$ ,  $\{2, 7, 11, 15\}$ ,  $\{2, 3, 5, 7, 11\}$  などであり,  $A$  の最悪数は5である.

$k$  を2以上の整数とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $n(A) = k^2$  で, かつ最良数も最悪数も  $k$  である集合  $A$  が存在することを証明せよ.
- (2)  $n(A) \geq k^2 + 1$  ならば,  $A$  の最良数または  $A$  の最悪数のどちらかは  $k + 1$  以上であることを証明せよ.
- (3) 要素数が2014で, かつ最良数と最悪数が等しいような集合, すなわち,

$$n(A) = 2014 \quad \text{かつ} \quad (A \text{ の最良数}) = (A \text{ の最悪数})$$

を満たす集合  $A$  を考える. このような集合たちの中で最良数が最小となる集合の例を挙げよ.