0002250729477999

北里大学

2016年 医学部 第1問

1枚目/4

増田

1 次の $\boxed{}$ にあてはまる答えを記せ．

(1) a と θ を実数とし，2次方程式 $x^2-\sqrt{7}ax+3a^3=0$ の2つの解を $\sin\theta$，$\cos\theta$ とする．このとき，a の値は $\boxed{ア}$ または $\boxed{イ}$ である．ただし，$\boxed{ア}<\boxed{イ}$ とする．さらに，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ であれば，$\sin\theta=\boxed{ウ}$ である．

$-\frac{1}{3}$　$\frac{1}{2}$　$\frac{\sqrt{7}-1}{4}$

(2) x，y，z を0以上の整数とする．このとき

(i) $x+y+z=9$ を満たす x，y，z の組の総数は $\boxed{エ}$ である． 55

(ii) $x+y+z\leqq9$ を満たす x，y，z の組の総数は $\boxed{オ}$ である． 220

(iii) $x+y+z\leqq9$ を満たす x，y，z の組のうち，x，y，z がすべて相異なるものの総数は $\boxed{カ}$ である． 138

(3) a を $0\leqq a\leqq1$ を満たす定数とする．直線 $y=1-x$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形を直線 $y=a$ の周りに1回転してできる回転体の体積を $V(a)$ とする．このとき $V(a)$ は，$0\leqq a<\frac{1}{2}$ ならば $\boxed{キ}$，$\frac{1}{2}\leqq a\leqq1$ ならば $\boxed{ク}$ と a を用いて表される．また，$V(a)$ のとり得る値の範囲は $\boxed{ケ}$ である．

(4) 1辺の長さが2の正四面体OABCがある．辺OAの中点をM，辺OBの中点をNとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．
このとき，$\cos\angle MCN$ の値は $\boxed{コ}$ である．また，頂点Oから平面MNCに下ろした垂線と平面MNCの交点をHとするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{OH}=\boxed{サ}\vec{a}+\boxed{シ}\vec{b}-\boxed{ス}\vec{c}$ である．さらに，直線OHと平面ABCの交点をFとするとき，$\frac{OH}{HF}$ の値は $\boxed{セ}$ である．

(下へ)

(3) (キ) $\pi\left(a^3+a^2-a+\frac{1}{3}\right)$　(ク) $\pi\left(-\frac{a^3}{3}+a^2\right)$　(ケ) $\frac{4}{27}\pi\leqq V(a)\leqq\frac{2}{3}\pi$

(4) (コ) $\frac{5}{6}$　(サ) $\frac{3}{11}$　(シ) $\frac{3}{11}$　(ス) $\frac{1}{11}$　(セ) $\frac{5}{6}$

(1) 解と係数の関係より．

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{7}a & \cdots① \\ \sin\theta\cos\theta=3a^3 & \cdots②\end{cases}$$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ に．
①，② を代入して

$$7a^2=1+2\times3a^3$$
$$6a^3-7a^2+1=0$$
$$(a-1)(6a^2-a-1)=0$$
$$(a-1)(2a-1)(3a+1)=0$$
$$\therefore a=1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}$$

① より，$-\sqrt{2}\leqq\sqrt{7}a\leqq\sqrt{2}$ だから，

$a=1$ は不適

よって $a=-\frac{1}{3}$ または $\frac{1}{2}$ …(ア)(イ)

さらに，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，

$0\leqq\sin\theta\leqq\cos\theta$ であり，① から a は正の値となるので $a=\frac{1}{2}$

2次方程式 $x^2-\frac{\sqrt{7}}{2}x+\frac{3}{8}=0$ を解くと，$x=\frac{\sqrt{7}\pm1}{4}$

$\sin\theta\leqq\cos\theta$ だから $\sin\theta=\frac{\sqrt{7}-1}{4}$ …(ウ)

2016年 医学部 第1問 　2枚目/4 　増田

(2) $x \geqq y \geqq z \geqq 0$ として考え、あとで $\{x, y, z\}$ の並べかえを考える。

(i) $x+y+z=9$ を $x \geqq y \geqq z$ として樹形図で考えると

x — y — z

9 — 0 — 0 Ⓐ
8 — 1 — 0 Ⓑ
7 — 2 — 0 Ⓑ
　 — 1 — 1 Ⓐ
6 — 3 — 0 Ⓑ
　 — 2 — 1 Ⓑ
5 — 4 — 0 Ⓑ
　 — 3 — 1 Ⓑ
　 — 2 — 2 Ⓐ
4 — 4 — 1 Ⓐ
　 — 3 — 2 Ⓑ
3 — 3 — 3 Ⓒ

Ⓐは $x \neq y = z$
Ⓑは $x \neq y \neq z$
Ⓒは $x = y = z$
の組とする。

Ⓐ 4組
Ⓑ 7組
Ⓒ 1組

Ⓐは $\{x, y, z\}$ の並べかえが 3通り、
Ⓑは 〃 $3! = 6$ 通り、
Ⓒは 〃 1通り

Ⓐ 4×3 + Ⓑ 7×6 + Ⓒ 1×1
$= 12 + 42 + 1 = \underline{55}$ …(エ)

(ii) (i) と同様に考える。

$x+y+z=8$

x — y — z

8 — 0 — 0 Ⓐ
7 — 1 — 0 Ⓑ
6 — 2 — 0 Ⓑ
　 — 1 — 1 Ⓐ
5 — 3 — 0 Ⓑ
　 — 2 — 1 Ⓑ
4 — 4 — 0 Ⓐ
　 — 3 — 1 Ⓑ
　 — 2 — 2 Ⓐ
3 — 3 — 2 Ⓐ

Ⓐ 5組
Ⓑ 5組

$x+y+z=7$

7 — 0 — 0 Ⓐ
6 — 1 — 0 Ⓑ
5 — 2 — 0 Ⓑ
　 — 1 — 1 Ⓐ
4 — 3 — 0 Ⓑ
　 — 2 — 1 Ⓑ
3 — 3 — 1 Ⓐ
　 — 2 — 2 Ⓐ

Ⓐ 4組
Ⓑ 4組

$x+y+z=6$

6 — 0 — 0 Ⓐ
5 — 1 — 0 Ⓑ
4 — 2 — 0 Ⓑ
　 — 1 — 1 Ⓐ
3 — 3 — 0 Ⓐ
　 — 2 — 1 Ⓑ
2 — 2 — 2 Ⓒ

Ⓐ 3組
Ⓑ 3組
Ⓒ 1組

$x+y+z=5$

5 — 0 — 0 Ⓐ
4 — 1 — 0 Ⓑ
3 — 2 — 0 Ⓑ
　 — 1 — 1 Ⓐ
2 — 2 — 1 Ⓐ

Ⓐ 3組
Ⓑ 2組

$x+y+z=4$

4 — 0 — 0 Ⓐ
3 — 1 — 0 Ⓑ
2 — 2 — 0 Ⓐ
　 — 1 — 1 Ⓐ

Ⓐ 3組
Ⓑ 1組

$x+y+z=3$

3 — 0 — 0
2 — 1 — 0
1 — 1 — 1

Ⓐ 1組
Ⓑ 1組
Ⓒ 1組

$x+y+z=2$

2 — 0 — 0
1 — 1 — 0

Ⓐ 2組

$x+y+z=1$

1 — 0 — 0

Ⓐ 1組

$x+y+z=0$

0 — 0 — 0

Ⓒ 1組

以上、全体で

Ⓐ 26組　Ⓑ 23組　Ⓒ 4組

$\{x, y, z\}$ の並べかえを考慮して

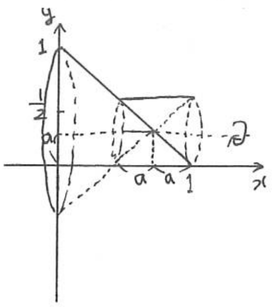
Ⓐ 26×3 + Ⓑ 23×6 + Ⓒ 4×1
$= \underline{220}$ …(オ)

(iii) $\{x, y, z\}$ がすべて異なるのはⒷの組で、

$23 \times 6 = \underline{138}$ …(カ)

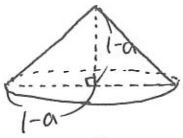
2016年 医学部 第1問　　3枚目 / 4　　増田

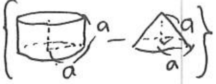
(3)



$0 \leqq a < \frac{1}{2}$ のとき

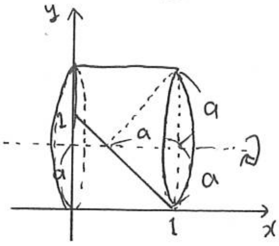
$V(a)$ は



$+\ 2 \times \{$  $\}$

$$V(a) = \frac{1}{3}(1-a)^2\pi(1-a) + 2\times\left\{a^2\pi a - \frac{1}{3}a^2\pi a\right\}$$

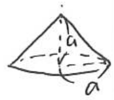
$$= \underline{\left(a^3 + a^2 - a + \frac{1}{3}\right)\pi} \cdots (キ)$$



$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき

$V(a)$ は

$-$

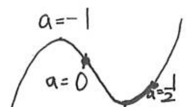


$$V(a) = a^2\pi \times 1 - \frac{1}{3}a^2\pi \times a$$

$$= \underline{\left(a^2 - \frac{a^3}{3}\right)\pi} \cdots (ク)$$

$0 \leqq a < \frac{1}{2}$ では $V'(a) = \pi(3a^2 + 2a - 1)$

$$= \pi(a+1)(3a-1)$$

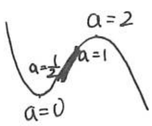


$V(0) = \frac{\pi}{3}$

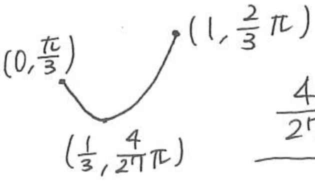
$V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}\pi$

$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ では $V'(a) = \pi(2a - a^2)$

$$= \pi a(2-a)$$

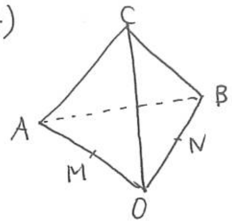


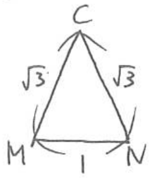
$V(1) = \frac{2}{3}\pi$



$$\underline{\frac{4}{27}\pi \leqq V(a) \leqq \frac{2}{3}\pi}$$

(4)





$CM = CN = \sqrt{3}$

$MN = 1$ だから

余弦定理より

$$\cos\angle MCN = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 1^2}{2(\sqrt{3})^2}$$

$$= \underline{\frac{5}{6}} \cdots (コ)$$

$\overrightarrow{OH} = X\vec{a} + Y\vec{b} + Z\vec{c}$ とおく。

Hは平面MNC上にあるので

$$\overrightarrow{OH} = 2X\,\overrightarrow{OM} + 2Y\,\overrightarrow{ON} + Z\,\overrightarrow{OC}$$

$$2X + 2Y + Z = 1 \cdots ①$$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{CM}$ より

$$(X\vec{a} + Y\vec{b} + Z\vec{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right)$$

$$= 2X - 2X + Y - 2Y + Z - 4Z = 0$$

(ただし $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 4$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 2$ を用いた)

$$Y = -3Z \cdots ②$$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{MN}$ より

$$(X\vec{a} + Y\vec{b} + Z\vec{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

$$= X - 2X + 2Y - Y + Z - Z = 0$$

$$X = Y \cdots ③$$

①, ②, ③ より $2\times(-3Z) + 2\times(-3Z) + Z$

$$= -11Z = 1$$

$$Z = -\frac{1}{11},\ X = Y = \frac{3}{11}$$

$$\underline{\overrightarrow{OH} = \frac{3}{11}\vec{a} + \frac{3}{11}\vec{b} - \frac{1}{11}\vec{c}} \cdots (サ)(シ)(ス)$$

増田

(4) $\overrightarrow{OF} = k\overrightarrow{OH}$ とおくと、

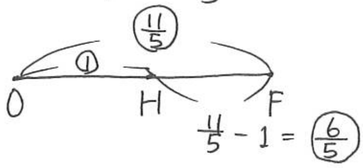
$$\overrightarrow{OF} = \left(\frac{3}{11}k\right)\vec{a} + \left(\frac{3}{11}k\right)\vec{b} + \left(-\frac{1}{11}k\right)\vec{c}$$

Fは平面ABC上にあるので、

$$\frac{3}{11}k + \frac{3}{11}k - \frac{1}{11}k = 1$$

$$\frac{5}{11}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{11}{5}$$



$$\frac{OH}{HF} = \frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6} \cdots (セ)$$