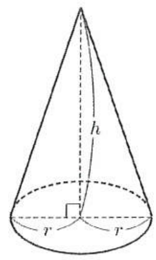
0001833186618999

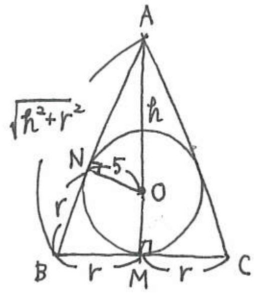
愛知教育大学

2014年 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 図のような，底面の半径が r，高さが h の円錐があり，そこに半径5の球が内接しているとする．ただし，$h>10$ とする．以下の問いに答えよ．





(1) この円錐の底面の半径 r を h を用いて表せ．

(2) この円錐の表面積を最小にする h の値を求めよ．

(1) $\triangle ABM \backsim \triangle AON$ より．

$AB : BM = AO : ON \quad \therefore \sqrt{h^2+r^2} : r = h-5 : 5$

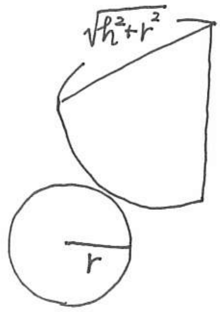
$\therefore 5\sqrt{h^2+r^2} = r(h-5)$

両辺2乗して． $25(h^2+r^2) = r^2h^2 - 10r^2h + 25r^2$

$\therefore h(25h - r^2h + 10r^2) = 0$

$h>10$ より． $(10-h)r^2 + 25h = 0 \quad \therefore \underline{r = 5\sqrt{\frac{h}{h-10}}}$ //

(2) 表面積を S とおくと．右図より．



$S = \underbrace{\pi r^2}_{円} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot\sqrt{h^2+r^2}}_{おうぎ形}$

表面積は．$\frac{1}{2}lr$ を使った．

$= \pi\cdot 25\cdot\frac{h}{h-10} + \pi\cdot 5\sqrt{\frac{h}{h-10}}\cdot\sqrt{\frac{h(h-5)^2}{h-10}}$

$= \frac{5h^2}{h-10}\pi$

相加・相乗を使える形にした．
（微分して求めてもよい）

$= \left\{(h-10) + \frac{100}{h-10}\right\}\cdot 5\pi + 100\pi$

$h>10$ より．相加・相乗

$\therefore S \geqq 2\sqrt{\frac{100(h-10)}{h-10}}\cdot 5\pi + 100\pi$

$= 200\pi$

等号成立は

このとき，$h-10 = \frac{100}{h-10}$ より．

$\underline{h = 20}$ //