2015年 理系 第2問

$\boxed{2}$ p, q は正の実数とし,

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある.

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{p^n}$ とする. 数列 $\{b_n\}$ の一般項を p, q, n で表せ.

(2) $q = 1$ とする. すべての自然数 n について $a_{n+1} \geqq a_n$ となるような p の値の範囲を求めよ.

(1) 与式の両辺を p^{n+1} ($\neq 0$) で割って

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

$$\therefore\ b_{n+1} = b_n + \left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

∴ 階差数列を考えることで, $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{q}{p}\right)^{k+1}$ $(n \geqq 2)$

ここで, $b_1 = \frac{a_1}{p^1} = 0$ より, $b_n = \dfrac{\frac{q^2}{p^2}\left(1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right)}{1-\left(-\frac{q}{p}\right)} = \underline{\dfrac{q^2}{p(p+q)}\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}}$ //

$n=1$ を代入すると, $b_1 = 0$ となり,

$n=1$ のときも成り立つ

(2) (1) より, $a_n = p^n \cdot b_n = \dfrac{p^{n-1}\cdot q^2}{p+q}\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$

$q=1$ を代入して, $a_n = \dfrac{p^{n-1}}{p+1}\left\{1-\left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}\right\}$

$$\therefore\ a_{n+1} - a_n = \frac{p^n}{p+1}\left\{1-\left(-\frac{1}{p}\right)^n\right\} - \frac{p^{n-1}}{p+1}\left\{1-\left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{p+1}\left\{(p-1)\cdot p^{n-1} + 2(-1)^{n-1}\right\}$$

(i) $0<p<1$ のとき, $(p-1)\cdot p^{n-1} < 0$, n:偶数のとき $2\cdot(-1)^{n-1}<0$ となり不適.

(ii) $p=1$ のとき, $(p-1)\cdot p^{n-1} = 0$, n:偶数のとき $2\cdot(-1)^{n-1}<0$ となり不適.

(iii) $p>1$ のとき, $(p-1)\cdot p^{n-1} \geqq 2$ (n:偶数のとき), $(p-1)\cdot p^{n-1} \geqq 0$ (n:奇数のとき) となればよい

(左辺) は単調増加であり, $n=1$ のときは (左辺) $= p-1 \geqq 0$

$n=2$ のときは, (左辺) $= (p-1)\cdot p \geqq 2$ $\quad \therefore\ p \geqq 2$

以上より, $\underline{p \geqq 2}$ //