

2014年 獣医学部・海洋生命科学学部 第3問



3 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $x = p$ で極大値 $f(p)$, $x = 1$ で極小値 -4 をとるものとする。ただし, a, b, c, p は定数とする。次の間に答えよ。

- (1) a, b, c を p を用いて表せ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(2, f(2))$ における接線を l とする。接線 l の傾きを p を用いて表せ。
- (3) (2) の接線 l が点 $(2p, f(2p))$ を通るとき, p の値を求めよ。また, このとき極大値 $f(p)$ の値を求めよ。

$$(1) f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$x = p, 1 \text{ で極値をもつので } f'(p) = 3p^2 + 2ap + b = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$f'(1) = 2a + b + 3 = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\text{また, } f(1) = a + b + c + 1 = -4 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } 3p^2 + 2ap - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow (p-1)(2a + 3p + 3) = 0$$

$$p \neq 1 \text{ (極大値と極小値と3点は異なるので) より, } a = -\frac{3}{2}(p+1) \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \text{ に代入して, } b = 3(p+1) - 3 \therefore b = 3p \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{3} \text{ に代入して, } c = \frac{3}{2}(p+1) - 3p - 5 \therefore c = -\frac{3}{2}p - \frac{7}{2} \dots \textcircled{6}$$

$$(2) (1) \text{ より } f'(x) = 3x^2 - 3(p+1)x + 3p \therefore f'(2) = 12 - 6(p+1) + 3p = -3p + 6 \dots \textcircled{7}$$

(3) (2) より 接線 l は,

$$y = (-3p + 6)(x - 2) + 8 + 4a + 2b + c$$

$$\therefore y = 3(-p + 2)x + 6p - 12 + 8 - 6(p+1) + 6p - \frac{3}{2}p - \frac{7}{2}$$

$$\therefore y = 3(-p + 2)x + \frac{9}{2}p - \frac{27}{2}$$

$$(2p, f(2p)) \text{ を通るので, } 8p^3 + 4ap^2 + 2bp + c = -6p^2 + 12p + \frac{9}{2}p - \frac{27}{2}$$

$$\therefore p^3 + 3p^2 - 9p + 5 = 0 \therefore (p-1)^2(p+5) = 0$$

$$p \neq 1 \text{ より } p = -5 \dots \textcircled{8} \quad \text{このとき } f(-5) = 104 \dots \textcircled{9}$$