兵庫県立大学

2014年経済・経営第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 一般項が $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問に答えなさい．

(1) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} < a_n$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $a_n < \frac{1}{10}$ となる n の最小値を求めなさい．

(1) $a_n - a_{n+1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$

$= 2\sqrt{n+1} - (\sqrt{n} + \sqrt{n+2})$

ここで，$(2\sqrt{n+1})^2 = 4n+4$

$(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})^2 = 2n+2+2\sqrt{n^2+2n}$

$< 2n+2+2\sqrt{n^2+2n+1}$

$= 4n+4$

$\therefore 2\sqrt{n+1} > \sqrt{n} + \sqrt{n+2}$ より，$a_n - a_{n+1} > 0$ $\therefore a_n > a_{n+1}$ ■

(2) $a_n = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\therefore a_n < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > 10$

$\Rightarrow 2\sqrt{n+1} > 10$

$\therefore n+1 > 25$ $\quad \therefore n > 24$

$n=25$ を考えると，$\sqrt{25} + \sqrt{26} > 10$ $(\because \sqrt{26} > 5)$

となり，成り立っている $\therefore \underline{n = 25}$ //