0001918811808999

北里大学

2014年 理学部 第1問

1枚目/2枚

数理 石井K

1 次の文中の ア ～ ヒ にあてはまる最も適切な数を答えなさい.

(1) 複素数 $z=-1+i$ を考える. ここで, i は虚数単位である. このとき,

$$z+z^2+z^3+z^4=\boxed{\text{ア}}^{\,-3}+\boxed{\text{イ}}^{\,1}\,i$$

である. また,

$$\sum_{n=1}^{12} z^n=\boxed{\text{ウ}}\boxed{\text{エ}}^{\,-3\ 9}+\boxed{\text{オ}}\boxed{\text{カ}}^{\,1\ 3}\,i$$

となる.

(1) $z^2=(-1+i)^2=-2i$, $z^3=-2i(-1+i)=2+2i$

$z^4=(-2i)^2=-4$

$\therefore\ z+z^2+z^3+z^4=\underline{-3+i}$ //

$\sum_{n=1}^{12} z^n=(1+z^4+z^8)(z+z^2+z^3+z^4)$

$=(1-4+16)\cdot(-3+i)=\underline{-39+13i}$ //

(2) $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲における関数 $f(\theta)=\dfrac{1}{3}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos^2\theta-\dfrac{2}{3}$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\ -1}{\boxed{\text{ク}}\ 3}$, 最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\ -1}{\boxed{\text{コ}}\ 9}$ である.

(2) $f(\theta)=\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{1}{2}(1-\sin^2\theta)-\frac{2}{3}$

$=-\frac{1}{2}\sin^2\theta+\frac{1}{3}\sin\theta-\frac{1}{6}$

$=-\frac{1}{2}\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より. $0\leqq\sin\theta\leqq1$ より

$\underline{最小値\ -\frac{1}{3},\ 最大値\ -\frac{1}{9}}$ //

(3) 循環小数 $0.\dot{2}01\dot{4}$ を分数で表すと,

$$0.\dot{2}01\dot{4}=\frac{\boxed{\text{サ}}\boxed{\text{シ}}\boxed{\text{ス}}\boxed{\text{セ}}\ (2\ 0\ 1\ 4)}{\boxed{\text{ソ}}\boxed{\text{タ}}\boxed{\text{チ}}\boxed{\text{ツ}}\ (9\ 9\ 9\ 9)}$$

となる.

(3) $x=0.2014\,2014\,2014\cdots$ とおくと

$10000x=2014.2014\,2014\cdots$

$\therefore\ 9999x=2014$ $\quad\therefore\ \underline{x=\frac{2014}{9999}}$ //

(4) 平面上に異なる2点A, Bをとる. 線分ABの中点をMとすると, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$ を満たす点Pの軌跡は,

$$\overrightarrow{\mathrm{MO}}=\frac{\boxed{\text{テ}}\ -5}{\boxed{\text{ト}}\ 3}\overrightarrow{\mathrm{MA}}$$

を満たす点Oを中心とする半径

$$\frac{\boxed{\text{ナ}}\ 4}{\boxed{\text{ニ}}\ 3}|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|$$

の円である.

(5) 同じ大きさの赤玉と白玉が何個か袋に入っている. よくかきまぜた後, この袋の中から同時に2個の玉を取り出したとき, 2個とも赤の確率を p, 2個のうち1個が赤, 1個が白の確率を q, 2個とも白の確率を r と書くとすると, それらの比例関係は次のようになった.

$$p:q:r=14:20:5$$

この袋の中の赤玉の個数は $\boxed{\text{ヌ}}$ 8, 白玉の個数は $\boxed{\text{ネ}}$ 5 である.

(6) a, b, c は次の方程式を満たす整数とする.

$$a\log_{10}\frac{5}{6}+b\log_{10}15+c\log_{10}\frac{10}{9}=\log_{10}5000$$

このとき, $a=\boxed{\text{ノ}}$ −1, $b=\boxed{\text{ハ}}$ 3, $c=\boxed{\text{ヒ}}$ 2 である.

2枚目へつづく

数理 石井K

(4) $|\overrightarrow{AP}| = 2|\overrightarrow{BP}|$ より, $|\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA}| = 2|\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MB}|$

点Mは線分ABの中点なので $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA}$

$\therefore |\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA}| = 2|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MA}|$

$|\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA}|^2 = 4|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MA}|^2$

$\therefore |\overrightarrow{MP}|^2 + |\overrightarrow{MA}|^2 - 2\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MA} = 4|\overrightarrow{MP}|^2 + 4|\overrightarrow{MA}|^2 + 8\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MA}$

$\therefore \left|\overrightarrow{MP} + \frac{5}{3}\overrightarrow{MA}\right|^2 = \frac{16}{9}|\overrightarrow{MA}|^2$

$\therefore$ 点Pの軌跡は, $\underline{\overrightarrow{MO} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{MA}}$ をみたす点Oを中心とする半径 $\underline{\frac{4}{3}|\overrightarrow{MA}|}$ の円

(5) 赤玉が x 個, 白玉が y 個であるとすると. ($x \geqq 2$, $y \geqq 2$)

$$p = \frac{{}_xC_2}{{}_{(x+y)}C_2}, \quad q = \frac{{}_xC_1 \cdot {}_yC_1}{{}_{(x+y)}C_2}, \quad r = \frac{{}_yC_2}{{}_{(x+y)}C_2}$$

$$\therefore p : q : r = \frac{x(x-1)}{2} : xy : \frac{y(y-1)}{2} = 14 : 20 : 5$$

$$\therefore 4\cdot\frac{y(y-1)}{2} = xy \iff y(2y-2-x) = 0$$
$$\iff x = 2y-2$$

$$\therefore \frac{(2y-2)(2y-3)}{2} : (2y-2)y = 14 : 20$$

$$\iff 2y-3 : 2y = 7 : 10$$

$$\iff y = 5$$

このとき $x = 8$ 　　$\therefore$ 赤玉は8個, 白玉は5個

(6) (与式) $\iff \log_{10}\left(\frac{5}{6}\right)^a \cdot 15^b \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^c = \log_{10} 5\cdot 10^3$

$$\iff \left(\frac{5}{6}\right)^a \cdot 15^b \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^c = 2^3\cdot 5^4$$

$$\iff 2^c\cdot 3^b\cdot 5^{a+b+c} = 2^{a+3}\cdot 3^{a+2c}\cdot 5^4$$

素因数分解の一意性より $\begin{cases} c = a+3 \\ b = a+2c \\ a+b+c = 4 \end{cases}$

$\therefore \underline{a = -1,\ b = 3,\ c = 2}$