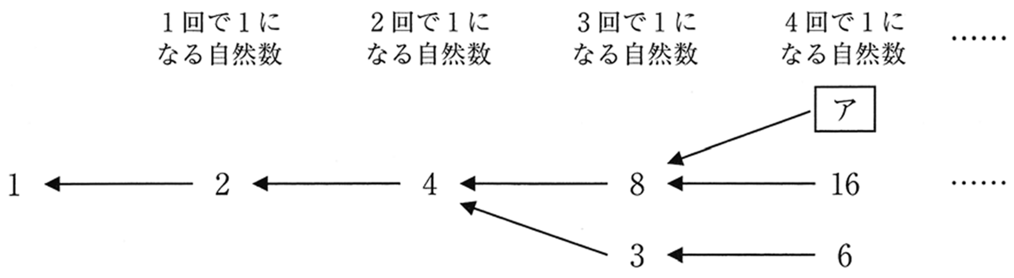
2016年 理学部 第3問

$\boxed{3}$ 次の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ノ}}$ にあてはまる最も適切な数値を答えなさい．

(1) 2以上のある自然数を出発点とし，それに対して次の操作を繰り返して行い，1に到達したら終了とする．

- 偶数は2で割り，3以上の奇数は1を足す

この操作によって，自然数2は1回の操作（$2 \to 1$）で1に変換される．同様に，3は3回（$3 \to 4 \to 2 \to 1$），4は2回（$4 \to 2 \to 1$）の操作で1に変換される．このような変換操作は，下図のように1を起点として枝分かれする樹形図によって整理することができる．



n 回の操作で1になる自然数の個数を X_n とすれば，1回の操作で1になる自然数は2のみであるので $X_1 = 1$，2回で1となる自然数は4のみであり $X_2 = 1$ となる．3回で1となる自然数は，1回の操作で4になる3と8の2つがあるので $X_3 = 2$ となる．4回で1となる自然数は，$\boxed{\text{ア}}$，16，6の3つで $X_4 = 3$，同様にして，$X_5 = \boxed{\text{イ}}$ であることがわかる．

n 回の操作で1になる偶数の個数を E_n，奇数の個数を O_n と書くと，X_n，E_n，O_n の間に

$$X_n = E_n + O_n$$

が成立する．

E_{n+1} を E_n と O_n で表すと，

$$E_{n+1} = \boxed{\text{ウ}}\,E_n + \boxed{\text{エ}}\,O_n$$

となる．また $n \geqq 2$ の場合には，O_{n+1} を E_n と O_n で表すと，

$$O_{n+1} = \boxed{\text{オ}}\,E_n + \boxed{\text{カ}}\,O_n$$

となる．これらの2つの漸化式をまとめて，X_n の漸化式を求めると

$$X_{n+2} = \boxed{\text{キ}}\,X_{n+1} + \boxed{\text{ク}}\,X_n$$

となる．$X_1 = 1$，$X_2 = 1$ だったので，$X_{10} = \boxed{\text{ケ}}\boxed{\text{コ}}$ と求めることができる．

X_n の漸化式を解くことを考える．次の2次方程式を考えよう．

$$x^2 - \boxed{\text{キ}}\,x - \boxed{\text{ク}} = 0$$

この方程式の2つの解を α, β と書くと,

$$\alpha = \frac{\boxed{サ} + \sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}, \quad \beta = \frac{\boxed{サ} - \sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$$

である．解と係数の関係

$$\alpha + \beta = \boxed{セ}, \quad \alpha\beta = \boxed{ソ}$$

を用いることにより，X_n の漸化式は

$X_{n+2} - \alpha X_{n+1} = \beta(X_{n+1} - \alpha X_n)$ および $X_{n+2} - \beta X_{n+1} = \alpha(X_{n+1} - \beta X_n)$

と書き直すことができる．したがって漸化式は,

$X_{n+2} - \alpha X_{n+1} = \beta^n(X_2 - \alpha X_1)$ および $X_{n+2} - \beta X_{n+1} = \alpha^n(X_2 - \beta X_1)$

と解くことができる．これらから X_{n+2} を消去すれば，X_{n+1} が得られる．

(2) 数列 $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \cdots$, の間には次の漸化式

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$$

が成立し，$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{4}$ であるとする．

この漸化式を解くために，(1) の解法を用い，次の2次方程式を考える．

$$x^2 + \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}x + \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}} = 0$$

この2次方程式の2つの解を α, β と書き，(1) と同様に漸化式を書き直せば,

$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ および $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

であることが分かり，これらから一般項 a_n は

$$a_n = \frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}} + \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\left(\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}\right)^n$$

であることが分かる．