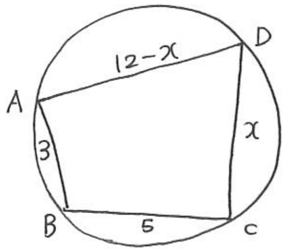
2016年 医学部 第2問　　1枚目／2　　増田

$\boxed{2}$ AB = 3, BC = 5, CD + DA = 12 である四角形 ABCD が円に内接している．CD = x とおく．次の問いに答えよ．

(1) AC = $3\sqrt{6}$ のとき，x の値を求めよ．
(2) x のとり得る値の範囲を求めよ．
(3) 四角形 ABCD の面積の最大値を求めよ．
(4) 四角形 ABCD の 4 辺すべてが接する円が存在するとき，x の値を求めよ．



ただし
$0 < x < 12$

(1) $\angle ABC = \theta$ とおくと、
$\angle ADC = 180° - \theta$

$\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{3^2+5^2-(3\sqrt{6})^2}{2\times3\times5} = -\frac{2}{3}$$

$\triangle ADC$ において余弦定理より、

$$(3\sqrt{6})^2 = (12-x)^2 + x^2 - 2(12-x)\cdot x\cdot\cos(\pi-\theta)$$

$$x^2 + (12-x)^2 + \frac{4}{3}x(12-x) = 54$$

$$x^2 - 12x + 27 = 0$$

$$(x-3)(x-9) = 0$$

$\therefore x = 3, 9$　(両方とも適)

(2) x のとり得る値の範囲は、$\angle ABC = \theta$ が $0 < \theta < \pi$ で動くことと、辺 CD の長さ x が $0 < x < 12$ にあることを満たす。
まず余弦定理より、

$$AC^2 = 9 + 25 - 30\cos\theta = x^2 + (12-x)^2 + 2x(12-x)\cos\theta$$

$$(2x^2 - 24x - 30)\cos\theta = 2x^2 - 24x + 110$$

$$\cos\theta = \frac{x^2 - 12x + 55}{x^2 - 12x - 15}$$　(ただし $0<x<12$ で $x^2-12x-15 \neq 0$)

ここで、(分母) $= x^2 - 12x - 15$
$= (x-6)^2 - 51$ が

$0 < x < 12$ では常に負であることに注意して、

$$-1 < \cos\theta < 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad -1 < \frac{x^2-12x+55}{x^2-12x-15} < 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad -(x^2-12x-15) > x^2-12x+55 \quad \cdots①$$
$$x^2-12x+55 > x^2-12x-15 \quad \cdots②$$

これを解いて

①より $2x^2 - 24x + 40 < 0$
$x^2 - 12x + 20 < 0$
$(x-2)(x-10) < 0$
$2 < x < 10$

②は常に成立。

以上より、$2 < x < 10$

0002250819477999

北里大学

2016 年 医学部 第 2 問　　2枚目／2　　増田

$\boxed{2}$ AB ＝ 3，BC ＝ 5，CD ＋ DA ＝ 12 である四角形 ABCD が円に内接している．CD ＝ x とおく．次の問いに答えよ．

(1) AC ＝ $3\sqrt{6}$ のとき，x の値を求めよ．

(2) x のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) 四角形 ABCD の面積の最大値を求めよ．

(4) 四角形 ABCD の 4 辺すべてが接する円が存在するとき，x の値を求めよ．

(3) (四角形ABCDの面積)

$$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \sin\theta + \frac{1}{2}\cdot(12-x)\cdot x\cdot \sin(\pi-\theta)$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2}+6x+\frac{15}{2}\right)\sin\theta = S \text{ とおく。}$$

(2)より　$\cos\theta = \dfrac{x^2-12x+55}{x^2-12x-15}$

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{-140(x^2-12x+20)}{(x^2-12x-15)^2}$$

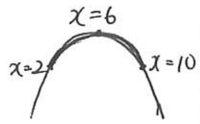
$$S^2 = \frac{(x^2-12x-15)^2}{4}\cdot\sin^2\theta$$

$$= -35(x^2-12x+20)$$

$$= -35\{(x-6)^2-16\}$$

S^2 は $x=6$ のとき最大値

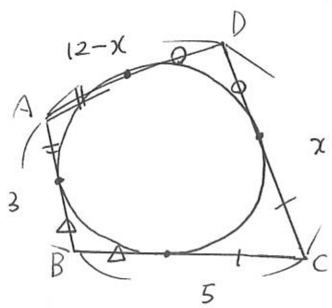
35×16



S の最大値は

$$\sqrt{35\times16} = \underline{4\sqrt{35}}$$

(4)



円に外接する四角形の対辺の和は等しいので、

$$(12-x)+5 = 3+x$$

$$2x = 14$$

$$\therefore x = \underline{7}$$