2012 年 医学部 第 4 問

$\boxed{4}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$で表される 1 次変換を f とする．f によって，点 $\mathrm{P}_0(1,\ 0)$ が移る点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，正の整数 n に対して点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ が移る点を $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$ とする．原点を O として，以下の問いに答えよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ の値を求めよ．

(2) 2 以上の整数 n で，直線 OP_n が線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ と交わる最小の n を求めよ．

(3) i を虚数単位とする．0 でない整数 n に対して，実数 a_n，b_n を $(2+3i)^n = a_n + b_n i$ により定める．このとき次の等式

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$$

が 0 でないすべての整数 n に対して成り立つことを証明せよ．ただし，正の整数 m に対し $A^{-m}=(A^m)^{-1}$ とする．