0001973546208999

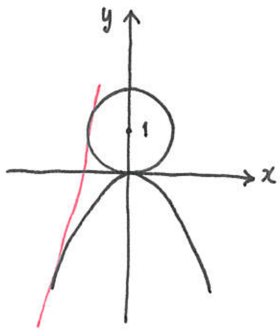
大阪大学

2015年 文系 第2問

$\boxed{2}$ 直線 $\ell : y = kx + m\ (k > 0)$ が円 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と放物線 $C_2 : y = -\frac{1}{2}x^2$ の両方に接している．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) k と m を求めよ．

(2) 直線 ℓ と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．



(1) $x^2 + (y-1)^2 = 1$ に $y = kx + m$ を代入して

$$x^2 + \{kx + (m-1)\}^2 - 1 = 0$$

$$(k^2+1)x^2 + 2k(m-1)x + (m-1)^2 - 1 = 0$$

これが重解をもつので判別式を D_1 とおくと

$$D_1/4 = \{k(m-1)\}^2 - (k^2+1)(m^2-2m) = 0$$

$$\therefore k^2 - m^2 + 2m = 0 \cdots ①$$

$y = -\frac{1}{2}x^2$ に $y = kx + m$ を代入して

$x^2 + 2kx + 2m = 0$ これが重解をもつので判別式を D_2 とおくと．

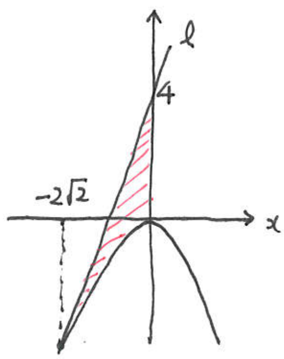
$$D_2/4 = k^2 - 2m = 0 \cdots ②$$

①，② より $m(m-4) = 0 \quad \therefore m = 0, 4$

このうち $k > 0$ となるのは，$\underline{(k, m) = (2\sqrt{2}, 4)}$ //

(2) (1)のとき，接点の x 座標は，$x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 = 0$

$$\therefore (x + 2\sqrt{2})^2 = 0 \quad \therefore x = -2\sqrt{2}$$



$$\therefore S = \int_{-2\sqrt{2}}^{0} 2\sqrt{2}x + 4 + \frac{1}{2}x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2\sqrt{2}}^{0} (x + 2\sqrt{2})^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x + 2\sqrt{2})^3\right]_{-2\sqrt{2}}^{0}$$

$$= \underline{\frac{8\sqrt{2}}{3}}$$ //