0002109090987999

東京理科大学

2014年 基礎工 第5問

数理 石井K

5 座標平面上の曲線 $y = x^2$ 上に2点 A$(-1,\ 1)$，B$(3,\ 9)$ をとり，t を実数として，点 P$(t,\ t^2)$ をとる．$f(t) = \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ とおく．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の内積を表している．さらに，$t \neq -1,\ 3$ のとき，2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ のなす角を θ とおく．ただし，$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) $t = 0$ のときの $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) $f(t)$ は t の4次式となる．それを降べきの順に整理して書け．

(3) $f(t)$ は

$$f(t) = (t+m)(t+n)(t^2+at+b) \quad (\text{ただし，} m,\ n,\ a,\ b \text{ は整数})$$

の形に書ける．$f(t)$ をこの形に書き表せ．

(4) $-1 < t < 3$ の範囲内で，$\theta = 90^\circ$ となるときの t の値を求めよ．

(5) 左側からの極限 $\displaystyle\lim_{t\to3-0}\cos\theta$ の値を求めよ．

(1) $t=0$ のとき，P$(0,0)$ なので $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (-1,1)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (3,9)$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} = \frac{-3+9}{\sqrt{2}\cdot3\sqrt{10}} = \underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}\ //$$

(2)
$$\begin{aligned} f(t) &= (-1-t,\ 1-t^2)\cdot(3-t,\ 9-t^2) \\ &= (-1-t)(3-t) + (1-t^2)(9-t^2) \\ &= -3-2t+t^2+9-10t^2+t^4 \\ &= \underline{t^4-9t^2-2t+6}\ // \end{aligned}$$

(3) $f(-1) = f(3) = 0$ ∴ 因数定理より，$f(t) = \underline{(t+1)(t-3)(t^2+2t-2)}\ //$

(4) $\theta = 90^\circ$ のとき $f(t) = \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = 0$ となるので (3)より，$(t+1)(t-3)(t^2+2t-2) = 0$

$-1<t<3$ より，$t^2+2t-2=0$ ∴ $\underline{t = \sqrt{3}-1}\ //$

(5)
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} = \frac{(t+1)(t-3)(t^2+2t-2)}{\sqrt{(-1-t)^2+(1-t^2)^2}\cdot\sqrt{(3-t)^2+(9-t^2)^2}} = \frac{(t+1)(t-3)(t^2+2t-2)}{|1+t|\sqrt{1+(1-t)^2}\cdot|t-3|\sqrt{1+(t+3)^2}}$$

∴ $-1<t<3$ において，

$$\cos\theta = \frac{(t+1)(t-3)(t^2+2t-2)}{(t+1)\sqrt{1+(1-t)^2}\cdot(3-t)\sqrt{1+(t+3)^2}} = -\frac{t^2+2t-2}{\sqrt{1+(1-t)^2}\cdot\sqrt{1+(t+3)^2}}$$

$$\therefore \lim_{t\to3-0}\cos\theta = -\frac{13}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{37}} = \underline{-\frac{13}{\sqrt{185}}}\ //$$