千葉大学

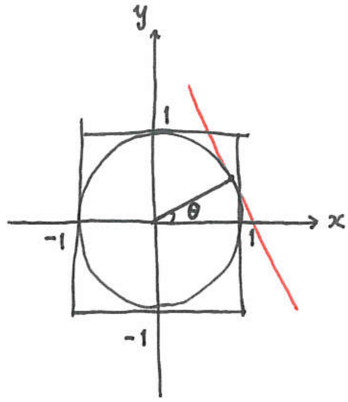
2014年 理学部（数学・情報数理） 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 座標平面上に，原点を中心とする半径1の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある．円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$（ただし $0<\theta<\frac{\pi}{2}$）における接線と正方形の隣接する2辺がなす三角形の3辺の長さの和は一定であることを示せ．また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ．

円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線は

$l:\ \cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y=1$ と表せる



これと $x=1$ との交点は $\left(1,\ \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$y=1$ との交点は $\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta},\ 1\right)$

∴ 3辺の長さの和を L とおくと，

$$L=\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)+\left(1-\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)+\sqrt{\left(1-\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}-1\right)^2}$$

$$=2-\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}+\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)}$$

ここで，$\sin\theta+\cos\theta-1=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1$ と $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より．

$\sin\theta+\cos\theta-1>0$，$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ なので

$$\therefore L=2-\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=2\ (一定)$$

また，三角形の面積を S とおくと．

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1-\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ より

$1<t\leqq\sqrt{2}$ であり，$S=\dfrac{(t-1)^2}{t^2-1}=\dfrac{t-1}{t+1}=1-\dfrac{2}{t+1}$

∴ S の最大値は $1-\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2}$ で

これは $t=\sqrt{2}$ すなわち $\underline{\theta=\frac{\pi}{4}\ のとき}$ //