2014年 経済学部 第2問

$\boxed{2}$ 平面上の2点P(1, 2), Q(3, 2)と直線 $L: y = ax + 1$ に対して，PとLの距離を p とし，QとLの距離を q とする．a が実数全体を動くとき，$p^2 + q^2$ の最小値と，最小値を与える a を求めよ．

$L: ax - y + 1 = 0$ ∴点と直線のキョリ公式より．

$$p = \frac{|a-2+1|}{\sqrt{a^2+1}}, \quad q = \frac{|3a-2+1|}{\sqrt{a^2+1}}$$

∴ $f(a) = p^2 + q^2$ とおくと．$f(a) = \dfrac{(a-1)^2 + (3a-1)^2}{a^2+1}$

$$= \frac{10a^2 - 8a + 2}{a^2+1}$$

$$\therefore f'(a) = \frac{(20a-8)(a^2+1) - (10a^2-8a+2)\cdot 2a}{(a^2+1)^2}$$

$$= \frac{8(a^2+2a-1)}{(a^2+1)^2}$$

∴ $f'(a) = 0$ となるのは $a = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

また．$\displaystyle\lim_{a \to \pm\infty} f(a) = 10$

a	$\cdots$	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(a)$	↗		↘		↗

$f(-1-\sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2} > 10$

$f(-1+\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} < 10$

∴ 最小値は $6 - 4\sqrt{2}$ ($a = -1+\sqrt{2}$ のとき)