2014年 工学部 第3問

$\boxed{3}$ 座標平面上に2つの曲線 $C_1: y=-x^2+12$，$C_2: y=x^2-10x+29$ がある．曲線 C_1 上を動く点Pの x 座標を a とし，曲線 C_1 の点Pにおける接線を ℓ とする．ただし，$a>0$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 接線 ℓ と x 軸，y 軸で囲まれた三角形の面積を S とする．S を a を用いて表せ．また，S の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(3) 接線 ℓ と曲線 C_2 が2個の共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

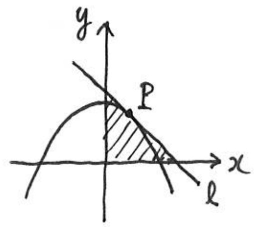
(4) 接線 ℓ と曲線 C_2 が2個の共有点をもつとき，それらの中点の軌跡を求めよ．

(1) C_1 について、$y' = -2x$ より、$\ell: y = -2a(x-a) - a^2 + 12$

∴ $\ell: y = -2ax + a^2 + 12$

(2) ℓ と x 軸の交点の x 座標は、

$2ax = a^2 + 12$ ∴ $x = \frac{a^2+12}{2a}$



y 軸との交点の y 座標は、$y = a^2 + 12$

∴ $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+12}{2a} \cdot (a^2+12) = \frac{(a^2+12)^2}{4a}$

$S'(a) = \frac{2(a^2+12) \cdot 2a \cdot 4a - (a^2+12)^2 \cdot 4}{16a^2} = \frac{3(a^2+12)(a+2)(a-2)}{4a^2}$

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	0	$+$
$S(a)$		↘	32	↗

極小

$a > 0$ より、$S'(a) = 0$ となるのは、$a = 2$

右の増減表より、S の最小値は 32 ($a=2$ のとき)

(3) $x^2 - 10x + 29 - (-2ax + a^2 + 12) = 0$

∴ $x^2 + (2a-10)x - a^2 + 17 = 0$　　$D/4 = (a-5)^2 - (-a^2+17)$

$= 2a^2 - 10a + 8$

∴ $2(a-4)(a-1) > 0$ より、

$0 < a < 1,\ a > 4$

(4) $x^2 + (2a-10)x - a^2 + 17 = 0$ の解を α, β とすると、

中点は $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ -2a \cdot \frac{\alpha+\beta}{2} + a^2 + 12\right) = (-a+5,\ 2a^2 - 10a + a^2 + 12)$

∴ 中点を (X, Y) とおくと、$Y = 3(5-X)^2 - 10(5-X) + 12$

∴ $Y = 3X^2 - 20X + 37$　　∴ 放物線 $y = 3x^2 - 20x + 37$ ($x < 1,\ 4 < x < 5$)