



2016年理工学部第3問

3 a, b を定数とし、関数 $f(x) = \sin 2x + a \cos x + b$ とする。 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) b を a を用いて表せ。
 (2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ における法線が、点 $Q\left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{3}, 0\right)$ を通るとき、 a, b の組をすべて求めよ。
 (3) (2) で求めた a, b で定められる $f(x)$ のうち、 $x = \frac{\pi}{6}$ で極値をとるものについて考える。このとき $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において、 $f(x)$ のすべての極値を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sin \frac{\pi}{3} + a \cos \frac{\pi}{6} + b \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}a + b + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}a + b + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \therefore b = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-a) //$$

$$(2) f'(x) = 2 \cos 2x - a \sin x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 - a$$

(i) $a \neq -2$ のとき。

$$\text{法線の傾きは } \frac{1}{a+2}$$

$$PQ \text{ の傾きは } \frac{b-0}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(a-1)$$

$$\therefore \frac{1}{a+2} = \frac{a-1}{4} \text{ より } (a-2)(a+3) = 0 \quad \therefore a = -3, 2$$

$$\therefore (a, b) = (-3, 2\sqrt{3}), (2, -\frac{\sqrt{3}}{2}) //$$

(ii) $a = -2$ のとき P, Q を同時に通る y 軸に平行な直線は存在せず不適。

$$(i), (ii) \text{ より } (a, b) = (-3, 2\sqrt{3}), (2, -\frac{\sqrt{3}}{2}) //$$

$$(3) f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} - a \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2}a \quad \therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ で極値をとるのは } (a, b) = (2, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\text{このとき } f(x) = \sin 2x + 2 \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = 2 \cos 2x - 2 \sin x = -2(2 \sin x - 1)(\sin x + 1)$$

$$\therefore \text{極大値 } \sqrt{3} \text{ (} x = \frac{\pi}{6} \text{ のとき), 極小値 } -2\sqrt{3} \text{ (} x = \frac{5}{6}\pi \text{ のとき)} //$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{5}{6}\pi$...	$\frac{3}{2}\pi$...	2π
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	+	
$f(x)$			$\nearrow \sqrt{3}$		$\searrow -2\sqrt{3}$		\nearrow		\nearrow
			極大		極小				