



## 2017年理系第3問

3 1辺の長さが  $a_0$  の正四面体  $OA_0B_0C_0$  がある. 図のように, 辺  $OA_0$  上の点  $A_1$ , 辺  $OB_0$  上の点  $B_1$ , 辺  $OC_0$  上の点  $C_1$  から平面  $A_0B_0C_0$  に下ろした垂線をそれぞれ  $A_1A'_1$ ,  $B_1B'_1$ ,  $C_1C'_1$  としたとき, 三角柱  $A_1B_1C_1-A'_1B'_1C'_1$  は正三角柱になるとする. ただし, ここでは底面が正三角形であり, 側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする. 同様に, 点  $A_2, B_2, C_2, A'_2, B'_2, C'_2, \dots$  を次のように定める. 正四面体  $OA_kB_kC_k$  において, 辺  $OA_k$  上の点  $A_{k+1}$ , 辺  $OB_k$  上の点  $B_{k+1}$ , 辺  $OC_k$  上の点  $C_{k+1}$  から平面  $A_kB_kC_k$  に下ろした垂線をそれぞれ  $A_{k+1}A'_{k+1}$ ,  $B_{k+1}B'_{k+1}$ ,  $C_{k+1}C'_{k+1}$  としたとき, 三角柱  $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}-A'_{k+1}B'_{k+1}C'_{k+1}$  は正三角柱になるとする. 辺  $A_kB_k$  の長さを  $a_k$  とし, 正三角柱  $A_kB_kC_k-A'_kB'_kC'_k$  の体積を  $V_k$  とするとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 点  $O$  から平面  $A_0B_0C_0$  に下ろした垂線を  $OH$  とし,  $\theta = \angle OA_0H$  とするとき,  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  の値を求めよ.
- (2)  $a_1$  を  $a_0$  を用いて表せ.
- (3)  $V_k$  を  $a_0$  を用いて表し,  $\sum_{k=1}^{\infty} V_k$  を求めよ.

