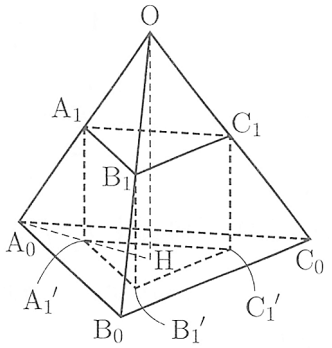
神戸大学

2017年 理系 第3問

3 1辺の長さが a_0 の正四面体 $OA_0B_0C_0$ がある．図のように，辺 OA_0 上の点 A_1，辺 OB_0 上の点 B_1，辺 OC_0 上の点 C_1 から平面 $A_0B_0C_0$ に下ろした垂線をそれぞれ A_1A_1'，B_1B_1'，C_1C_1' としたとき，三角柱 $A_1B_1C_1$-$A_1'B_1'C_1'$ は正三角柱になるとする．ただし，ここでは底面が正三角形であり，側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする．同様に，点 A_2，B_2，C_2，A_2'，B_2'，C_2'，$\cdots$ を次のように定める．正四面体 $OA_kB_kC_k$ において，辺 OA_k 上の点 A_{k+1}，辺 OB_k 上の点 B_{k+1}，辺 OC_k 上の点 C_{k+1} から平面 $A_kB_kC_k$ に下ろした垂線をそれぞれ $A_{k+1}A_{k+1}'$，$B_{k+1}B_{k+1}'$，$C_{k+1}C_{k+1}'$ としたとき，三角柱 $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$-$A_{k+1}'B_{k+1}'C_{k+1}'$ は正三角柱になるとする．辺 A_kB_k の長さを a_k とし，正三角柱 $A_kB_kC_k$-$A_k'B_k'C_k'$ の体積を V_k とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 点Oから平面 $A_0B_0C_0$ に下ろした垂線を OH とし，$\theta = \angle OA_0H$ とするとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) a_1 を a_0 を用いて表せ．

(3) V_k を a_0 を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} V_k$ を求めよ．