2017 年 理系 第 3 問

$\boxed{3}$ 1 辺の長さが a_0 の正四面体 $\mathrm{OA_0B_0C_0}$ がある．図のように，辺 $\mathrm{OA_0}$ 上の点 $\mathrm{A_1}$，辺 $\mathrm{OB_0}$ 上の点 $\mathrm{B_1}$，辺 $\mathrm{OC_0}$ 上の点 $\mathrm{C_1}$ から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A_1A_1'}$，$\mathrm{B_1B_1'}$，$\mathrm{C_1C_1'}$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A_1B_1C_1}$-$\mathrm{A_1'B_1'C_1'}$ は正三角柱になるとする．ただし，ここでは底面が正三角形であり，側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする．同様に，点 $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{A_2'}$，$\mathrm{B_2'}$，$\mathrm{C_2'}$，$\cdots$ を次のように定める．正四面体 $\mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$ において，辺 OA_k 上の点 A_{k+1}，辺 OB_k 上の点 B_{k+1}，辺 OC_k 上の点 C_{k+1} から平面 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+1}'$，$\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}'$，$\mathrm{C}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}'$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}$-$\mathrm{A}_{k+1}'\mathrm{B}_{k+1}'\mathrm{C}_{k+1}'$ は正三角柱になるとする．辺 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ の長さを a_k とし，正三角柱 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$-$\mathrm{A}_k'\mathrm{B}_k'\mathrm{C}_k'$ の体積を V_k とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 O から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線を OH とし，$\theta = \angle \mathrm{OA_0H}$ とするとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) a_1 を a_0 を用いて表せ．

(3) V_k を a_0 を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} V_k$ を求めよ．