0001858091418999

和歌山大学

2014年第3問　(1)は相似を使うと計算へらせるけど，普通，受験生はこっちだろうな…

数理 石井K

3 立方体 ABCD-EFGH がある．辺 AD，AB をそれぞれ 1：3 に内分する点を P，Q とする．辺 FG 上に FS：SG $= t : (1-t)$ $(0 < t < 1)$ をみたす点 S をとる．また，3 点 P，Q，S を通る平面と辺 BF の交点を R とする．$\overrightarrow{AB} = \vec{x}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{y}$，$\overrightarrow{AE} = \vec{z}$ とするとき，次の問いに答えよ．

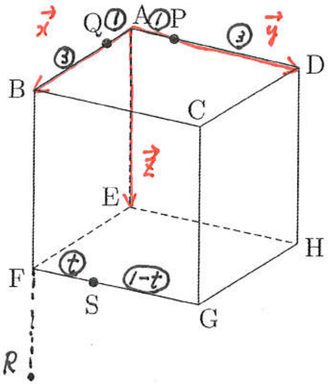
(1) $\overrightarrow{QR}$ を $\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ および t を用いて表せ．

(2) $\angle QRS = 120°$ となるときの t の値を求めよ．

(1)

$$\overrightarrow{AS} = \vec{x} + (1-t)\vec{z} + t(\vec{y}+\vec{z})$$
$$= \vec{x} + t\vec{y} + \vec{z}$$

$$\therefore \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AQ}$$
$$= \frac{3}{4}\vec{x} + t\vec{y} + \vec{z} \quad \cdots ①$$



$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AP}$$
$$= \vec{x} + \left(t - \frac{1}{4}\right)\vec{y} + \vec{z} \quad \cdots ②$$

$$\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\vec{x} + k\vec{z} \quad \cdots ③$$ と表せる　(k：実数)

R が平面 PQS 上にあり，$\overrightarrow{PS}$ と $\overrightarrow{QS}$ が一次独立より，

$$\overrightarrow{QR} = a \cdot \overrightarrow{PS} + b\overrightarrow{QS}$$ と表せる．$\cdots ④$

④に①，②を代入して，
$$\overrightarrow{QR} = a\left(\vec{x} + \left(t-\frac{1}{4}\right)\vec{y} + \vec{z}\right) + b\left(\frac{3}{4}\vec{x} + t\vec{y} + \vec{z}\right)$$
$$= \left(a + \frac{3}{4}b\right)\vec{x} + \left(at - \frac{1}{4}a + bt\right)\vec{y} + (a+b)\vec{z} \quad \cdots ⑤$$

$\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ は一次独立なので，③と⑤の係数を比べて，

$$a + \frac{3}{4}b = \frac{3}{4}, \quad (a+b)t - \frac{1}{4}a = 0, \quad a + b = k$$

これを解くと，$a = \dfrac{12t}{4t+3}$，$b = \dfrac{3-12t}{4t+3}$，$k = \dfrac{3}{4t+3}$

③に代入して，$\overrightarrow{QR} = \dfrac{3}{4}\vec{x} + \dfrac{3}{4t+3}\vec{z}$ //

(2) (1)より，
$$|\overrightarrow{QR}|^2 = \frac{9}{16}|\vec{x}|^2 + \frac{18}{4(4t+3)}\vec{x}\cdot\vec{z} + \frac{9}{(4t+3)^2}|\vec{z}|^2$$

ここで $|\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = c$ とおく．また，$\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{z} = \vec{z}\cdot\vec{x} = 0$ であるから

$$|\overrightarrow{QR}|^2 = \frac{9}{16}c^2 + \frac{9}{(4t+3)^2}c^2, \quad \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{QS} = -t\vec{y} - \frac{4t}{4t+3}\vec{z}$$

$$\therefore |\overrightarrow{SR}|^2 = t^2c^2 + \left(\frac{4t}{4t+3}\right)^2 c^2 \qquad \therefore \cos 120° = \frac{\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{SR}}{|\overrightarrow{QR}||\overrightarrow{SR}|}$$ より，

$$-\frac{1}{2} = \frac{-\frac{4t}{4t+3}\cdot\frac{3}{4t+3}\cdot c^2}{\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{(4t+3)^2}}\cdot\sqrt{t^2 + \left(\frac{4t}{4t+3}\right)^2}\cdot c^2}$$

これを解くと，$t = \dfrac{1}{4}$ //

解くのはけっこう大変(ルートの内身をそろえると ルートを消せる)