0002314185867999

2016年 理系1 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ a, bは正の実数で, $b<1$とする.

$$c=a-b-ab,\quad I=\int_0^a \frac{x}{1+x}\,dx+\int_0^{-b}\frac{x}{1+x}\,dx-ab$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 不等式$c>-1$が成り立つことを証明せよ.

(2) 等式$I=c-\log(c+1)$が成り立つことを証明せよ.

(3) 不等式$I\geqq 0$が成り立つことを証明せよ. また, $I=0$が成り立つためのa, bが満たすべき条件を求めよ.

(1) $c+1=a-b-ab+1$

$=(a+1)(1-b)$

$a>0,\ 0<b<1$ より, $a+1>0,\ 1-b>0$ $\therefore (a+1)(1-b)>0$

$\therefore c+1>0$ すなわち, $c>-1$ ▨

(2) $\dfrac{x}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x}$ より

$$I=\int_0^a 1-\frac{1}{1+x}\,dx+\int_0^{-b}1-\frac{1}{1+x}\,dx-ab$$

$$=\Big[x-\log|1+x|\Big]_0^a+\Big[x-\log|1+x|\Big]_0^{-b}-ab$$

$$=a-\log(1+a)+(-b)-\log(1-b)-ab$$

$$=a-b-ab-\log(1+a-b-ab)$$

$$=c-\log(c+1)$$ ▨

(3) $f(x)=x-\log(x+1)$ とおくと

$$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{x}{x+1}$$

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	0	↗

右の増減表より, $x>-1$のとき $x-\log(x+1)\geqq 0$

すなわち, $I\geqq 0$ ▨

等号成立は $c=0 \iff \underline{a-b-ab=0}$ //