0001860639318999

島根大学

2014年 医学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ a, b, c, nを自然数とし，$a \leqq b \leqq c$かつ$n(a+b+c)=abc$をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a=b=c$のとき，nは3の倍数であることを示せ．

(2) $n=3$のとき，自然数の組$(a,\ b,\ c)$をすべて求めよ．

(1) $3an = a^3$　$a>0$より $3n = a^2$　(左辺)は3の倍数なので，

a^2は3の倍数　∴ aは3の倍数なので，$a=3k$ (k：整数)とおくと．

$3n=(3k)^2$　∴ $n=3k^2$となり．nは3の倍数 ■

(2) 両辺abc $(\neq 0)$で割ると，$3\cdot\dfrac{a+b+c}{abc}=1$

$$\therefore \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{1}{3}$$

$a \leqq b \leqq c$なので $\dfrac{3}{a^2} \geqq \dfrac{1}{3}$ $\iff$ $a^2 \leqq 9$

$\iff$ $1 \leqq a \leqq 3$ $(\because a>0)$

(i) $a=1$のとき．(与式)は $3+3b+3c=bc$

$\therefore (b-3)(c-3)=12$

$\therefore (b,c)=(4,15),(5,9),(6,7)$

(ii) $a=2$のとき (与式)は $6+3b+3c=2bc$

$\therefore (2b-3)(2c-3)=21$

$\therefore (b,c)=(2,12),(3,5)$

(iii) $a=3$のとき．(与式)は $9+3b+3c=3bc$

$\therefore (b-1)(c-1)=4$

$\therefore (b,c)=(3,3)$

(i)〜(iii)より $(a,b,c)=(1,4,15),(1,5,9),(1,6,7),(2,2,12),$
$(2,3,5),(3,3,3)$ //