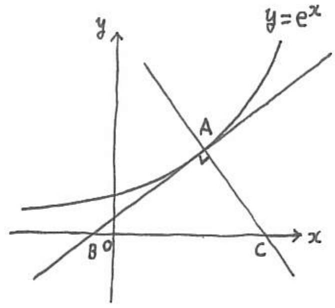
2011年 第6問

$\boxed{6}$ 曲線 $y = e^x$ 上の点Aにおける接線と法線が x 軸と交わる点を，それぞれB，Cとする．△ABCの面積が5のとき，△ABCの外心の座標を求めよ．



$A(t, e^t)$ とおくと．$y' = e^x$ より

接線は．$y = e^t(x-t) + e^t$

よって．$y = e^t x + (1-t)e^t$

$\therefore$ $B(t-1, 0)$ となる．

法線は．$y = -\dfrac{1}{e^t}(x-t) + e^t$

よって．$y = -\dfrac{1}{e^t}x + \dfrac{t}{e^t} + e^t$

$y=0$ を代入して．$x = t + e^{2t}$ $\therefore$ $C(t+e^{2t}, 0)$ となる．

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot\left|t + e^{2t} - (t-1)\right|\cdot e^t$$

$$= \frac{1}{2}e^t(e^{2t}+1)$$

これが5になるので

$$\frac{1}{2}e^t(e^{2t}+1) = 5 \iff (e^t)^3 + e^t - 10 = 0$$

$$\iff (e^t - 2)\underbrace{(e^{2t} + 2e^t + 5)}_{\text{常に正}} = 0$$

$$\iff e^t = 2$$

$$\iff t = \log 2$$

△ABCは∠A=90°の直角三角形なので

線分BCが外接円の直径であり．外接円の中心(外心)は

線分BCの中点，である．

よって．$\left(\dfrac{\log 2 - 1 + \log 2 + e^{2\log 2}}{2}, 0\right) = \underline{\left(\log 2 + \dfrac{3}{2}, 0\right)}$ //