2015年 文系 第3問

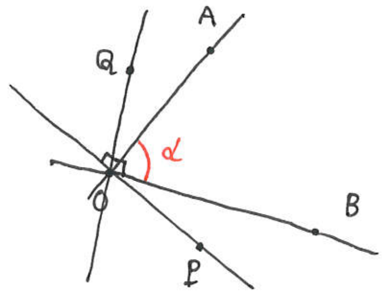
数理 石井K

[3] 平面において，一直線上にない3点O，A，Bがある．Oを通り直線OAと垂直な直線上にOと異なる点Pをとる．Oを通り直線OBと垂直な直線上にOと異なる点Qをとる．ベクトル$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$は$\overrightarrow{AB}$に垂直であるとする．

(1) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}$を示せ．

(2) ベクトル$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$のなす角をαとする．ただし，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$とする．このときベクトル$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$のなす角が$\pi-\alpha$であることを示せ．

(3) $\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OB}|}$を示せ．



(1) $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AB}$ より

$(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\therefore (\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

ここで，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{OB}$ より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}$ ▨

(2) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ のとき図は右上のようになる．（対称性より，A，Bの位置関係はこの場合のみ考えればよい）

$\angle AOQ=90^\circ-\alpha$，$\angle POB=90^\circ-\alpha$

$\therefore \angle POQ=90^\circ-\alpha+\alpha+90^\circ-\alpha=\pi-\alpha$ ▨

(3) (1)と(2)より

$|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OB}|\cdot\cos(90^\circ-\alpha)=|\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{OA}|\cdot\cos(90^\circ-\alpha)$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より，$\cos(90^\circ-\alpha)\neq 0$ より 両辺を $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(90^\circ-\alpha)$ でわって

$\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OB}|}$ ▨