

2015年 医学部 第3問

 数理  
石井K

3 関数  $f(x) = 9^x + 9^{-x} - \frac{20}{9}(3^{1-x} + 3^{1+x})$  ( $x$ は正の実数) は,  $x = a$  のとき最小値をとる.  $a$  の値を求めよ.

$$\begin{aligned} f(x) &= (3^x)^2 + (3^{-x})^2 - \frac{20}{9} \{ 3 \cdot (3^{-x}) + 3 \cdot 3^x \} \\ &= (3^x + 3^{-x})^2 - 2 - \frac{20}{3} (3^x + 3^{-x}) \end{aligned}$$

ここで,  $t = 3^x + 3^{-x}$  とおいて,  $f(x)$  を  $t$  で表したものを  $g(t)$  とおくと ( $t > 2$ )

$$\begin{aligned} g(t) &= t^2 - \frac{20}{3}t - 2 \\ &= \left(t - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{118}{9} \end{aligned}$$

$\therefore g(t)$  は  $t = \frac{10}{3}$  のとき, 最小値をとる

$\therefore f(x)$  は  $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$  のとき, 最小値をとる

$$\therefore (3^x)^2 - \frac{10}{3} \cdot 3^x + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore 3^x &= \frac{\frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - 4}}{2} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} \\ &= \frac{1}{3}, 3 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \pm 1 \quad x > 0 \text{ より } x = 1 \quad \therefore \underline{a = 1}$$