福島大学

2016年 理工 第4問

$\boxed{4}$ $F(x)=\int_0^x e^{-pt}\sin t\,dt$（$p$は正の定数）とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $F(x)$ を微分しなさい．

(2) 関数 $y=Ae^{-px}\cos x+Be^{-px}\sin x+C$（$A$，$B$，$C$は定数）を微分しなさい．

(3) $F(x)=Ae^{-px}\cos x+Be^{-px}\sin x+C$（$A$，$B$，$C$は定数）と表すことができる．このとき，$A$，$B$，$C$の値を求めなさい．
ただし，$F(0)$，$F'(0)$，$F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$の値を用いてよい．

(4) $T_n=|F(n\pi)-F((n-1)\pi)|$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とする．このとき，T_1，T_2の値を求めなさい．

(5) (4)のT_nに対して $\sum_{n=1}^{\infty}T_n$ を求めなさい．

(1) $\underline{F'(x)=e^{-px}\sin x}$ //

(2) $y'=-pAe^{-px}\cos x+Ae^{-px}\cdot(-\sin x)-pBe^{-px}\sin x+Be^{-px}\cos x$

$=\underline{(B-pA)e^{-px}\cos x-(A+pB)e^{-px}\sin x}$ //

(3) $F(0)=\int_0^0 e^{-pt}\sin t\,dt=0$ であるから，$A+C=0\ \cdots$①

(1)より $F'(0)=0$　一方，(2)より $F'(0)=B-pA$　$\therefore B-pA=0\ \cdots$②

同様にして，$F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{p}{2}\pi}=-(A+pB)e^{-\frac{p}{2}\pi}$　$e^{-\frac{p}{2}\pi}>0$ より，$A+pB=-1\ \cdots$③

①～③より，$\underline{A=-\frac{1}{p^2+1},\ B=-\frac{p}{p^2+1},\ C=\frac{1}{p^2+1}}$ //

(4) (3)より，$F(x)=\frac{1}{p^2+1}\left(-e^{-px}\cos x-pe^{-px}\sin x+1\right)$

$\therefore F(0)=0,\ F(\pi)=\frac{1}{p^2+1}(e^{-p\pi}+1),\ F(2\pi)=\frac{1}{p^2+1}(-e^{-2p\pi}+1)$

$\therefore T_1=|F(\pi)-F(0)|=\frac{1}{p^2+1}(e^{-p\pi}+1),\ T_2=|F(2\pi)-F(\pi)|=\frac{1}{p^2+1}\left|-e^{-2p\pi}-e^{-p\pi}\right|$

$\therefore \underline{T_1=\frac{1}{p^2+1}(e^{-p\pi}+1),\ T_2=\frac{1}{p^2+1}(e^{-p\pi}+1)e^{-p\pi}}$ //

(5) (4)と同様にして，$T_n=\frac{1}{p^2+1}(e^{-p\pi}+1)\cdot(e^{-p\pi})^{n-1}$

これは初項 $\frac{1}{p^2+1}(e^{-p\pi}+1)$，公比 $e^{-p\pi}$ の等比数列で $p>0$ より $0<e^{-p\pi}<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{1}{1-e^{-p\pi}}\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot(e^{-p\pi}+1)=\underline{\frac{e^{p\pi}+1}{(p^2+1)(e^{p\pi}-1)}}$ //